NICHT KOMPLEMENTIERTE IDEALE IN GEWICHTETEN (FN)-ALGEBREN GANZER FUNKTIONEN MEHRERER VERÄNDERLICHER

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung
des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen
Fakultät
der Universität Düsseldorf

vorgelegt von

JÜRGEN WOLTER

aus Hildesheim

Düsseldorf
1987

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543909_0092

Nicht komplementierte Ideale in gewichteten (FN)-Algebren ganzer Funktionen mehrerer Veränderlicher

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung
des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Düsseldorf

vorgelegt von
JÜRGEN WOLTER
aus Hildesheim

Düsseldorf 1987

Gedruckt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Düsseldorf

1. Referent: Prof. Dr. R. Meise
2. Referent: Prof. Dr. G. Fischer
3. Referent: Prof. Dr. D. Vogt

Tag der mündlichen Prüfung: 26.5.1987

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung 1

Zur Notation 4

Kapitel 1: Gewichtete Algebren ganzer Funktionen und ihre Eigenschaften als topologische Vektorräume 5

Kapitel 2: Quotientenräume von A_p° nach abgeschlossenen Idealen 19

Kapitel 3: Nicht komplementierte Hauptideale in $A_p^\circ(\mathbb{C}^2)$ 41

Kapitel 4: Anwendungen auf Nullräume von Faltungsoperatoren auf $A_q(\mathbb{C}^N)$ 62

Literaturverzeichnis 67

EINLEITUNG

Wir studieren in dieser Arbeit Ideale in Fréchetalgebren von ganzen Funktionen mehrerer Veränderlicher der Form

$$A_p^\circ(\mathbb{C}^N) := A_p^\circ := \{f\in H(\mathbb{C}^N) \mid \forall\, D>0 : \|f\|_{D,p} := \sup_{z\in\mathbb{C}^N} |f(z)|e^{-Dp(z)} < \infty\},$$

wo p eine nichtnegative plurisubharmonische Funktion auf $\mathbb{C}^N$ ist. An p stellen wir dabei Bedingungen analog zu denen von Hörmander [1], die sicherstellen, daß A_p° nuklear ist und die Polynome enthält.

Für $p(z) := |z|^\alpha$ $(\alpha>0)$ ist zum Beispiel A_p° der Raum der ganzen Funktionen von Ordnung α und Typ 0 oder von Ordnung kleiner als α.

Weitere Beispiele erhält man durch Fourier-Borel-Transformation der topologischen Dualräume von (DFN)-Räumen ganzer Funktionen der Form

$$A_q(\mathbb{C}^N) := A_q := \{f\in H(\mathbb{C}^N) \mid \exists\, D<\infty : \|f\|_{D,q} := \sup_{z\in\mathbb{C}^N} |f(z)|e^{-Dq(z)} < \infty\},$$

wenn q konvex und komponentenweise radial ist und einer Wachstumsbedingung genügt. Ist $\mu \in A_q'$, T_μ der zugehörige Faltungsoperator auf A_q und $F(\mu)$ die Fourier-Borel-Transformierte von μ, dann wird durch F der Orthogonalraum von $\ker T_\mu$ auf das von $F(\mu)$ erzeugte Hauptideal abgebildet. Daraus folgt, daß T_μ für ein $\mu \in A_q'\setminus\{0\}$ genau dann ein stetiges lineares Rechtsinverses hat, wenn $F(\mu)$ ein komplementiertes Ideal erzeugt.

Djakov und Mitiagin [1] zeigen, daß für schöne, komponentenweise radiale p die von Polynomen erzeugten Ideale abgeschlossen und komplementiert sind in $A_p^\circ(\mathbb{C}^N)$. Die Abgeschlossenheit beliebiger Hauptideale in diesen $A_p^\circ(\mathbb{C}^N)$ ist leicht zu verifizieren. Meise und Taylor [1] beweisen, daß dann in $A_p^\circ(\mathbb{C})$ nur die von Polynomen erzeugten Ideale komplementiert sind.

Wir zeigen für solche p: $\mathbb{C}^2 \to [0,\infty[$:

(A) Die von 'Graphen' $F(z,w) := f(z)-w$ erzeugten Hauptideale sind genau dann komplementiert in $A_p^\circ(\mathbb{C}^2)$, wenn f ein Polynom ist.

Daraus schließen wir für schöne, radiale $p: \mathbf{C}^2 \to [0,\infty[$ und $G \in A_p^\circ(\mathbf{C}^2)$ so, daß

$$G(z,w) = f(z) - \sum_{\substack{i+j\le m \\ 0\le i,j}} a_{i,j} z^i w^j \quad (m\in\mathbf{N},\ a_{i,j}\in\mathbf{C},\ a_{0,m}\neq 0),$$

f kein Polynom :

(B) Für alle $H \in A_p^\circ(\mathbf{C}^2)\setminus\{0\}$ ist das von GH in $A_p^\circ(\mathbf{C}^2)$ erzeugte Ideal nicht komplementiert.

Um (A) zu beweisen, verallgemeinern wir zuerst mit den Methoden von Berenstein und Taylor [2] und von Meise [1] Ergebnisse von Meise und Taylor [1] auf den Fall mehrerer Veränderlicher und nichtradialer Gewichte q. Insbesondere erhalten wir unter schwachen technischen Voraussetzungen an q:

(C) Wenn $F_1,\dots,F_N \in A_q^\circ(\mathbf{C}^N)$ langsam genug gegen ihre gemeinsame Nullstellenvarietät V abfallen, ist das von ihnen erzeugte Ideal J abgeschlossen in A_q° und A_q°/J ist endlichdimensional oder isomorph zu einem Potenzreihenraum von endlichem Typ.

Unter diesen Voraussetzungen beweisen wir weiter einen Interpolationssatz mit Gewichten für holomorphe Funktionen auf Mannigfaltigkeiten in $\mathbf{C}^N$ analog zu denen von Berenstein und Taylor [3] und Jarnicki [1].

Die Beweisidee von Aussage (A) läßt sich jetzt grob so skizzieren:

Ist I das von $F: (z,w) \mapsto f(z)-w$ erzeugte Ideal, können wir nach dem Interpolationssatz $A_p^\circ(\mathbf{C}^2)/I$ mit $A_q^\circ(\mathbf{C})$ identifizieren, wenn für $z\in\mathbf{C}$ $q(z) := p(z.f(z))$ ist.

Wenn f kein Polynom ist, konstruieren wir in $A_q^\circ(\mathbf{C})$ ein unendlich-kodimensionales, abgeschlossenes und komplementiertes Hauptideal J, für welches $A_q^\circ(\mathbf{C})/J$ gemäß (C) isomorph zu einem Potenzreihenraum von endlichem Typ ist.

Unter unseren Voraussetzungen ist $A_p^\circ(\mathbf{C}^2)$ stets ein Potenzreihenraum von unendlichem Typ, $A_q^\circ(\mathbf{C})/J$ und damit auch $A_q^\circ(\mathbf{C}) \cong A_p^\circ(\mathbf{C}^2)/I$ kann also nicht topologisch isomorph zu einem linearen Unterraum von $A_p^\circ(\mathbf{C}^2)$ sein nach einem Satz von Zahariuta [1].

Das Kernstück des Beweises ist die Konstruktion des Hauptideals J. Wir gehen aus von einer Idee von Meise und Taylor [3] zur Konstruktion eines $A_p^\circ(\mathbf{C})$ mit komplementiertem, unendlichkodimensionalem Hauptideal und suchen ein $g \in A_q^\circ(\mathbf{C})$,

$$g(z) := \prod_{j=1}^{\infty} \left(1-\frac{z}{a_j}\right) \quad (a_j \neq a_k \text{ für } j \neq k)$$

und konvergenzerzeugende Faktoren $g_j \in H(\mathbf{C})$, die wir in die Lagrange-Interpolationsformel auf $V(g) = \{a_j \mid j \in \mathbf{N}\}$ einfügen können so, daß das durch

$$\xi((\lambda_j)_j)(z) := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \frac{g(z)}{(z-a_j)\partial g(a_j)} g_j(z)$$

definierte ξ zu einer stetigen Rechtsinversen der Quotientenabbildung von $A_q^\circ(\mathbf{C})$ auf den Faktorraum nach dem von g erzeugten Ideal wird. Mit Hörmanders Lösung des $\bar{\partial}$-Problems mit Abschätzungen erhalten wir die g_j aus subharmonischen Funktionen φ_j auf $\mathbf{C}$, die Abschätzungen ähnlich den von $\log_+|g_j|$ verlangten erfüllen. Bei geeigneter Wahl der a_j lassen sich die φ_j konstruieren durch Fegen von

$$z \mapsto \log(\max(|f(z)|, d_j))$$

für passende $d_j \in \mathbf{R}$ auf Kreisringen mit Zentrum 0, die a_j enthalten.

Der Studienstiftung des deutschen Volkes gilt mein Dank für die finanzielle Förderung bei der Anfertigung dieser Arbeit. Den Professoren und Mitarbeitern an den Lehrstühlen für reine Mathematik III und IV der Univ. Düsseldorf möchte ich für die zur Verfügung gestellte Zeit am Schreibcomputer und Herrn Dr. R. Braun für seinen Druckertreiber danken. Vor allem aber danke ich für die Einführung in die Theorie der gewichteten Algebren ganzer Funktionen, die geduldige Betreuung und ständige Ermutigung bei der Arbeit und die konstruktive Kritik bei Durchsicht der ersten Niederschrift herzlich Herrn Prof. Dr. R. Meise.

ZUR NOTATION

Die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbf{C}$ nennen wir Δ. Ist G eine offene Teilmenge eines $\mathbf{C}^N$, bezeichnet $H(G)$ die holomorphen Funktionen auf G und $\mathcal{D}'_{(r,s)}(G)$ den Raum der (r,s)-Formen auf G mit Koeffizienten in den komplexwertigen Distributionen auf G. $\int_G \ldots d\lambda$ ist das Integral bez. des Lebesguemaßes auf $\mathbf{R}^{2N} \cong \mathbf{C}^N$.

$\partial_j f := \frac{\partial f}{\partial z_j}$ und $\bar{\partial}_j f := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}$ bezeichnen die Wirtingerableitungen von f nach der j-ten Koordinate in $\mathbf{C}^N$, ∂ und $\bar{\partial}$ die äußeren Ableitungen, falls nötig, im Sinne des Distributionenkalküls.

Für $x,y \in G$ ist $d(x,y)$ der euklidische Abstand von x und y in $\mathbf{C}^N$, und $\mathcal{O}_x$ die Algebra der Keime holomorpher Funktionen in x.

Für einen lokalkonvexen Raum E bezeichnet E'_b den Raum der stetigen linearen Funktionale auf E, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den beschränkten Teilmengen von E. Für $x \in E$, $y \in E'$ ist $\langle x,y \rangle = y(x)$.

KAPITEL 1

In diesem Kapitel führen wir die Algebren A_p, A_p° ein und geben ihre elementaren Eigenschaften an. Dann erklären wir die Begriffe, mit denen wir die A_p° untersuchen wollen.

Def. 1.1: $p: \mathbb{C}^N \to [0,\infty[$ heißt projektive (induktive) Gewichtsfunktion, wenn erfüllt sind:

1) p ist plurisubharmonisch.

2) Es gibt $r: \mathbb{C}^N \to [0,\infty[$ so, daß $r = o(p)$ ($r = O(p)$) und ein $1 < C < \infty$,für das

$\forall\, z,\xi \in \mathbb{C}^N$ mit $|z-\xi| < e^{-r(z)}$: $p(\xi) < Cp(z)+C$.

3) $\log(1+|z|^2) = o(p(z))$ ($\log(1+|z|^2) = O(p(z))$).

In vielen Sätzen werden wir stärkere Anforderungen an p stellen, darunter:

2*) $\exists\, C<\infty$ $\forall\, z,\xi \in \mathbb{C}^N$ mit $|z-\xi|<1$: $p(\xi) < Cp(z)+C$.

2'') $p(2z) = O(p(z))$

2''') $\exists\, A,B<\infty$ $\forall\, z \in \mathbb{C}^N$: $p(2z) < Ap(z)+B$, $2p(z) < p(Az)+B$.

4) p ist komponentenweise radial, also

$\forall\, z = (z_1,\ldots,z_N) \in \mathbb{C}^N$: $p(z) = p(|z_1|,\ldots,|z_N|)$.

Bem. 1.2: Insbesondere ist eine projektive Gewichtsfunktion auch eine induktive Gewichtsfunktion.

Es gelten offenbar 2''') => 2'') und 2*) => 2), aber auch wenn p 1),3),4) erfüllt, gilt i.A. nicht 2'') => 2). Denn wenn wir setzen:

$p(z,w) := \max(\log^2(1+|z|^2), \log^2(1+|w|^2), |z|+\log|w|)$,

gibt es für jedes $\alpha<\infty$, $C<\infty$ ein s so, daß für alle z mit $z > s$

$p(z,z^{-\alpha}) = \log(z^{-\alpha}e^z) > C\log^2(1+z^2)+C = Cp(z,0)+C$.

Ebenso ist, auch wenn 1),3),4) gelten, 2''') => 2*) i.A. falsch, wie man mit:

$p(z,w) := |z|^2+|w|^2+|zw|^4$ auf ähnliche Weise sieht.

Offenbar gibt es für N=1 keine solchen Gegenbeispiele.

Setzt man in 2''') oder der analogen Formulierung von 2'') A gleich 2^α, dann ergibt sich:

UNIV. LEIDEN BIBL.

Bem. 1.3: 1.1.2'') impliziert:

$$\exists\ \alpha,B,C<\infty \quad \forall\ z \in \mathbf{C}^N : p(z) \le C|z|^{\alpha}+B.$$

1.1.2''') impliziert:

$$\exists\ \alpha,B,C<\infty \quad \forall\ z \in \mathbf{C}^N : \frac{1}{C}|z|^{1/\alpha}-B \le p(z) \le C|z|^{\alpha}+B.$$

Beispiele 1.4: A) Ist φ: $[0,\infty[\longrightarrow [0,\infty[$ gegeben mit

$$\exists\ C<\infty\ \forall\ t\ge 0 : \varphi(2t)<C\varphi(t)+C\ ,$$

$s \longmapsto \varphi(e^s)$ konvex und strikt wachsend,

dann ist für $r>0$ $p: z \longmapsto \varphi(|z|^r)$ eine induktive Gewichtsfunktion. Ist $\log(1+t^2) = o(\varphi(t))$, wird p projektive Gewichtsfunktion. Insbesondere sind $z \longmapsto |z|^r$ $(r>0)$ und $z \longmapsto \log^s(1+|z|^2)$ $(s>1)$ projektive Gewichtsfunktionen auf $\mathbf{C}^N$.

B) Ist φ: $[0,\infty[\longrightarrow [0,\infty[$ konvex, strikt wachsend und erfüllt

$$\exists\ C<\infty \quad \forall\ t\ge 0 : \varphi(2t)<C\varphi(t)+C,$$

dann ist für jede projektive Gewichtsfunktion p auch $\varphi\circ p$ eine projektive Gewichtsfunktion.

C) $z \longmapsto e^{(|z|^r)}$ $(r>0)$; $z \longmapsto \log^s(1+|z|^2)+|\mathrm{Im}z|^r$ $(r>0,s>1)$; $z \longmapsto |\mathrm{Re}z|^r+|\mathrm{Im}z|^s$ $(r,s>0)$ sind projektive Gewichtsfunktionen auf $\mathbf{C}^N$.

D) Endliche Summen und endliche Maxima projektiver Gewichtsfunktionen sind projektive Gewichtsfunktionen.

Def. 1.5: Für eine (induktive oder projektive) Gewichtsfunktion p auf $\mathbf{C}^N$, f: $\mathbf{C}^N \longrightarrow \mathbf{C}$ lokal quadratintegrierbar und $0 < D < \infty$ seien

$$\|f\|_{D,p} := \operatorname*{esssup}_{z\in\mathbf{C}^N} |f(z)|e^{-Dp(z)} \text{ und}$$

$$\|f\|_{D,p} := [\int_{\mathbf{C}^N} |f|^2 e^{-2Dp} d\lambda]^{1/2}\ .$$

Weiter seien $B_{D,p} := \{\ f\in H(\mathbf{C}^N)\ |\ \|f\|_{D,p}<\infty\ \}$,

$$W_{D,p} := \{\ f\in H(\mathbf{C}^N)\ |\ \|f\|_{D,p}<\infty\ \}\ .$$

Für eine induktive Gewichtsfunktion p sei

$$A_p := A_p(\mathbb{C}^N) := \{ f\in H(\mathbb{C}^N) \mid \exists\, D<\infty : \|f\|_{D,p}<\infty \} ,$$

für eine projektive Gewichtsfunktion p sei

$$A_p^\circ := A_p^\circ(\mathbb{C}^N) := \{ f\in H(\mathbb{C}^N) \mid \forall\, D>0 : \|f\|_{D,p}<\infty \} .$$

Die Definition der induktiven Gewichtsfunktion erscheint zuerst in Hörmander [1], p.943, Th.1 . Die Definition der projektiven Gewichtsfunktion hier ist die 'logische' Übertragung der Anforderungen an p auf den Fall, daß ein projektiver Limes der $\|.\|_{D,p}$ statt eines induktiven gebildet werden soll.

1.1.2*) erlaubt im Wesentlichen eine bessere Abschätzung des Wachstums der Ableitungen von f durch das Wachstum von f aus A_p° oder A_p selbst, gemessen in den $\|.\|_{D,p}$ (vgl. Berenstein-Taylor [2], p.205, Prop. 3.1.). Die meisten 'interessanten' Gewichtsfunktionen erfüllen 1.1.2*), aber $z \mapsto e^{(|z|^r)}$ (r>1) macht eine Ausnahme, ebenso wie z.B. $(z,w) \mapsto |z|^2+|w|^2+|zw|^4$ und andere Gewichtfunktionen aus Kapitel 3 dieser Arbeit.

1.1.2'') und 1.1.2''') sind wichtig vor allem, wenn 1.1.4) zusätzlich gilt und die Beträge von Funktionen aus A_p° oder A_p nach unten abgeschätzt werden sollen (vgl. z.B. Lemma 3.1).

Der folgende Satz zählt grundlegende Eigenschaften der A_p° oder A_p auf, die wohlbekannt sind. Einige Beweise sind zur Bequemlichkeit des Lesers eingefügt.

Satz 1.6.A: Sei p eine projektive Gewichtsfunktion, dann gilt:

1) A_p° enthält die Polynome.

2) Es gibt ein $K(p) < \infty$ und für jedes D $(0<D<\infty)$ Konstanten $0 < \widetilde{K}(D,p), \widetilde{\widetilde{K}}(D,p) < \infty$ so, daß auf A_p°

$$\widetilde{K}(D,p)\|.\|_{DK(p),p} < \|.\|_{D,p} < \widetilde{\widetilde{K}}(D,p)\|.\|_{\frac{1}{2}D,p} .$$

3) Die Topologien der projektiven Limiten der $\|.\|_{D,p}$ $(D\to 0)$ und der $\|.\|_{D,p}$ $(D\to 0)$ auf A_p° sind gleich.

4) A_p° ist ein (FN)-Raum mit dieser Topologie.

5) $f \in A_p^\circ \Rightarrow \partial_i f \in A_p^\circ$ für alle i=1,...,N.

6) Sei $q: \mathbb{C}^M \to [0,\infty[$ eine andere projektive Gewichtsfunktion und $\Phi: \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^M \to [0,\infty[$ definiert durch $\Phi(x,y) := p(x)+q(y)$, dann ist Φ eine projektive Gewichtsfunktion und $A_p^\circ \hat{\otimes} A_q^\circ \cong A_\Phi^\circ$, wo der Isomorphismus induziert wird durch $\psi: f\otimes g \mapsto [(x,y) \mapsto f(x)g(y)]$.

1.6.B: Sei p eine induktive Gewichtsfunktion, dann gilt:

1) A_p enthält die Polynome.

2) Es gibt $K, K(p) < \infty$ und für jedes D $(K<D<\infty)$ Konstanten $0 < \widetilde{K}(D,p), \widetilde{\widetilde{K}}(D,p) < \infty$ so, daß auf A_p

$$\widetilde{K}(D,p)\|.\|_{DK(p),p} < \|.\|_{D,p} < \widetilde{\widetilde{K}}(D,p)\|.\|_{D-K,p} .$$

3) Die Topologien der induktiven Limiten der $\|.\|_{D,p}$ $(D\to\infty)$ und der $\|.\|_{D,p}$ $(D\to\infty)$ auf A_p sind gleich.

4) A_p ist ein (DFN)-Raum mit dieser Topologie.

5) $f \in A_p \Rightarrow \partial_i f \in A_p$ für alle i=1,...,N.

6) Sei $q: \mathbb{C}^M \to [0,\infty[$ eine andere induktive Gewichtsfunktion und $\Phi: \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^M \to [0,\infty[$ definiert durch $\Phi(x,y) := p(x)+q(y)$, dann ist Φ eine induktive Gewichtsfunktion und $A_p \hat{\otimes} A_q \cong A_\Phi$, wo der Isomorphismus induziert wird durch $\psi: f\otimes g \mapsto [(x,y) \mapsto f(x)g(y)]$.

Für das vervollständigte Tensorprodukt $E\hat{\otimes}F$ vergleiche z.B. Pietsch [1], Kap.7.

Beweis: (Wir führen nur den von 1.6.A durch, 1.6.B beweist man auf ähnliche Weise.) 1) ist einfach 1.1.3).

2) Wegen 1.1.3) gibt es $C_{D,p}$ so, daß für alle $f \in A_p^\circ$

$$\|f\|_{D,p} \le C_{D,p}\left\{ \int_{\mathbb{C}^N} |f(z)|^2 e^{-Dp(z)} (1+|z|^2)^{-(2N+1)} d\lambda(z) \right\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le C_{D,p}\left\{ \int_{\mathbb{C}^N} (1+|z|^2)^{-(2N+1)} d\lambda(z) \right\}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{\frac{1}{2}D,p} =$$

$$= \widetilde{K}(D,p)\|f\|_{\frac{1}{2}D,p} .$$

Andererseits ist für $z\in\mathbb{C}^N$, $f\in A_p^o$ und $S(z) := \{\xi \mid |\xi - z| < e^{-r(z)}\}$ wegen 1.1.2)

$$|f(z)|^2 \le C_N e^{r(z)} \int_{S(z)} |f|^2 d\lambda \le$$

$$\le C_N e^{r(z)} e^{2D(Cp(z)+C)} \int_{S(z)} |f|^2 e^{-2Dp} d\lambda ,$$

wo $C_N := \lambda(\{z\in\mathbb{C}^N \mid |z|\le 1\})^{-1}$ ist.

Da $(\int_{S(z)} |f|^2 e^{-2Dp} d\lambda)^{\frac{1}{2}} \le \|f\|_{D,p}$ und $r = o(p)$, ist klar, wie für $K(p) := 2C$ ein $K(D,p)$ zu finden ist.

3) ist eine direkte Konsequenz von 2).

4): Die Topologien von $B_{D,p}$, $W_{D,p}$ $(0<D<\infty)$ und A_p^o sind stärker als die kompakte Konvergenz, also sind diese Räume vollständig, die $B_{D,p}$ Banachräume und die $W_{D,p}$ Hilberträume. A_p^o ist ein Fréchetraum, da $(\|.\|_{1/n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ ein abzählbares Normensystem ist, das die Topologie von A_p^o erzeugt.

Sei $B'_{D,p}$ der topologische Dualraum von $B_{D,p}$ mit der schwach*-Topologie, $E>D$,

$$M := \{0\} \cup \{\delta_z e^{-Ep(z)} \mid z\in\mathbb{C}^N\} \subset B'_{D,p}, \quad \text{wo } \delta_z(f) := f(z) \text{ für } f \in B_{D,p}.$$

Dann ist $\varphi: \mathbb{C}^N \cup \{\infty\} \longrightarrow B'_{D,p}$, definiert durch:

$$z \longmapsto \delta_z e^{-Ep(z)} \text{ für } z\in\mathbb{C}^N,$$

$$\infty \longmapsto 0$$

stetig von der Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{C}^N$ nach $B'_{D,p}$ und also M schwach*-kompakt in $B'_{D,p}$. M ist offenbar wesentlich in $B'_{D,p}$. Sei $C(M)$ der Raum der auf M mit der von $B'_{D,p}$ induzierten Topologie stetigen komplexwertigen Funktionen mit der Topologie der

gleichmäßigen Konvergenz auf M. Für jedes H>0 ist dann auf C(M) stetig:

$$\nu_H\colon \varphi \mapsto \int_{\mathbb{C}^N} \varphi(\delta_z e^{-Ep(z)}) e^{-Hp(z)} d\lambda(z),$$

denn wegen 1.1.3) ist

$$|\nu_H(\varphi)| \leq C_H \sup_{v\in M} |\varphi(v)| \int_{\mathbb{C}^N} (1+|z|^2)^{-(2N+1)} d\lambda(z).$$

Also ist ν_H ein Borelmaß auf M.

Seien $z\in\mathbb{C}^N$ und S(z), C_N wie in 2) definiert. Dann ist wegen 1.1.2) für $f\in B_{D,p}$, G>0

$$|f(z)| \leq C_N e^{G(Cp(z)+C)} e^{r(z)} \int_{S(z)} |f| e^{-Gp} d\lambda$$

und also für G=E+H, H>0, $r\leq GCp+F$

$$\|f\|_{2GC,p} \leq C_N e^{GC+F} \int_{\mathbb{C}^N} |f| e^{-Gp} d\lambda =$$

$$= \text{const.} \int_{\mathbb{C}^N} (|f| e^{-Ep}) e^{-Hp} d\lambda =$$

$$= \text{const.} \int_M |\langle f, v\rangle| d\nu_H(v).$$

Also ist id: $B_{D,p} \longrightarrow B_{G,p}$ absolutsummierend für alle G>D>0 und folglich A_p° nuklear (vgl. z.B. Jarchow [1], 19.6.Th.1 und 21.2.Th.1).

5): Ist $\|f\|_{D,p} \leq C_D$, dann ist für $z\in\mathbb{C}^N$, S(z) wie in 2) und $\xi\in S(z)$

$$|f(\xi)| \leq C_D e^{DCp(z)+DC}$$

und also wegen der Cauchy-Ungleichung auf $S(z)\cap\{\xi \mid \xi_j=z_j (j\neq i)\}$

$$|\partial_i f(z)| \leq e^{r(z)} C_D e^{DCp(z)+DC}.$$

6): Daß Φ eine projektive Gewichtsfunktion ist, ist leicht nachgerechnet. ψ induziert eine Injektion (die auch ψ heiße) von $W_{D,p}\otimes W_{D,q}$ nach $W_{D,\Phi}$, und man rechnet weiter nach, daß

$$\|\psi(f\otimes g)\|_{D,\Phi} = \|f\|_{D,p} \|g\|_{D,q} \text{ für alle } f\in W_{D,p},\ g\in W_{D,q}.$$

$\psi(W_{D,p}\otimes W_{D,q})$ liegt schwach (und also stark) dicht in $W_{D,\Phi}$.

Für $k\in W_{D,\Phi}$, $g\in W_{D,q}$ und f lokal quadratintegrierbar auf $\mathbb{C}^N$ mit

$$\int_{\mathbb{C}^N}|f|^2e^{-2Dp}d\lambda < \infty$$

gilt nämlich

$$\int_{\mathbb{C}^N\times\mathbb{C}^M}|k(x,y)g(y)f(x)|e^{-2D\Phi(x,y)}d\lambda(x,y) < \infty,$$

weil $|k(x,y)g(y)f(x)| \le |k(x,y)|^2+|g(y)|^2|f(x)|^2$ $(x\in\mathbb{C}^N, y\in\mathbb{C}^M)$.

Folglich liegt nach dem Satz von Riesz die Funktion

$$h_g : x \longmapsto \int_{\mathbb{C}^M}\overline{k(x,y)}g(y)e^{-2Dq(y)}d\lambda(y) \text{ in } W_{D,p}.$$

Falls also für ein $k\in W_{D,\Phi}$ und alle $f\in W_{D,p}$, $g\in W_{D,q}$

$$0 = \int_{\mathbb{C}^N\times\mathbb{C}^M}\overline{k(x,y)}f(x)g(y)e^{-2Dp(x)-2Dq(y)}d\lambda(x,y) =$$

$$= \int_{\mathbb{C}^N}\left\{\int_{\mathbb{C}^M}\overline{k(x,y)}g(y)e^{-2Dq(y)}d\lambda(y)\right\}f(x)e^{-2Dp(x)}d\lambda(x),$$

folgt, daß $h_g\equiv 0$ ist für alle g und also $k\equiv 0$ nach einem ähnlichen Argument.

Mit anderen Worten: $W_{D,\Phi}$ ist eine Vervollständigung von $W_{D,p}\otimes W_{D,q}$ bezüglich einer Prä-Hilbertnorm $\|.\|_{D,\Phi}$, die erfüllt:

$$\varepsilon_{(U,V)}(.) \le \|.\|_{D,\Phi} \le \pi_{(U,V)}(.),$$

wo U,V die Einheitskugeln in $W_{D,p}$, $W_{D,q}$ und $\varepsilon_{(U,V)}$, $\pi_{(U,V)}$ die ε- und π-Tensorprodukt-Normen dazu sind (vgl. Pietsch [1], p.108, 7.1.2). Da A_p°, A_q° nuklear sind, gibt es zu jedem D>0 ein D'>0 so, daß für die Einheitskugeln U',V' in $W_{D',p}$, $W_{D',q}$ respektive

$$\pi_{(U,V)}(.) \le \varepsilon_{(U',V')}(.).$$

Also erhalten wir die Sequenz

$$W_{D',p}\,\hat{\otimes}_\varepsilon\, W_{D',q} \to W_{D,p}\,\hat{\otimes}_\pi\, W_{D,q} \to W_{D,\Phi} \to W_{D,p}\,\hat{\otimes}_\varepsilon\, W_{D,q}$$

mit den kanonischen Abbildungen, die jeweils stetig sind. Der Übergang zum projektiven Limes ergibt dann $A_p^\circ\hat{\otimes}A_q^\circ = A_\Phi^\circ$, und dieser Isomorphismus ist die stetige Fortsetzung von ψ.

Der Sinn der folgenden Definition wird klar in den Beweisen von 2.18 und 2.37; wir wollen auf bestimmte Sequenzen dort das Mittag-Leffler-Lemma 2.15 anwenden.

Def. 1.7: Eine projektive Gewichtsfunktion hat die Eigenschaft (ML) (d.h. Mittag-Leffler), wenn es eine Folge $(D(n))_{n\in\mathbf{N}}$ gibt mit $D(n)>0$ $(n\in\mathbf{N})$, $D(n)\downarrow 0$ so, daß für alle $n\in\mathbf{N}$ $W_{D(n+2),p}$ dicht ist in $W_{D(n+1),p}$ bezüglich der Norm $\|.\|_{D(n),p}$.

Daß 1.7 keine starke Einschränkung darstellt, zeigen die folgenden Sätze, ebenso wie Lemma 3.3.

Satz 1.8: (Taylor) Ist p eine konvexe, projektive Gewichtsfunktion, dann sind die Polynome dicht in A_p° und in jedem $W_{D,p}$ $(D>0)$.

Beweis: Vgl. Taylor [2], p.526, Th.2.

Satz 1.9: (Meise-Taylor) Ist p eine komponentenweise radiale, projektive Gewichtsfunktion, dann bilden die Monome eine absolute Basis in A_p° und eine orthogonale Basis in jedem $W_{D,p}$ $(D>0)$.

Beweis: Vgl. Meise-Taylor [1] für N=1, die Verallgemeinerung ist trivial.

Satz 1.10: (Taylor)
Sei $p(z_1,\ldots,z_N):=v(|z_1|,\ldots,|z_N|)+u(\mathrm{Im}z_1,\ldots,\mathrm{Im}z_N)$ und erfülle:

1) u ist konvex.
2) $(t_1,\ldots t_N)\mapsto v(e^{t_1},\ldots,e^{t_N})$ ist konvex auf $\mathbf{R}^N$.
3) $\log(1+|z|^2) = o(v(|z_1|,\ldots,|z_N|))$
4) $|x| = O(u(x_1,\ldots,x_N))$ für $x\in\mathbf{R}^N$.
5) $\forall\, r\in\mathbf{R}^N : \int_0^\infty \frac{v(tr)}{1+t^2}\,dt = \infty$.

Dann sind die Polynome dicht in A_p° und jedem $W_{D,p}$ $(D>0)$.

Beweis: Vgl. Taylor [2], p.532-538.

Bemerkung 1.11: 1) Insbesondere haben die Gewichtsfunktionen von Satz 1.8, 1.9 und 1.10 (ML).

2) Wenn $p:\ \mathbf{C}^N\to[0,\infty[$ und $q:\ \mathbf{C}^M\to[0,\infty[$ (ML) haben, hat auch $\Phi:\ \mathbf{C}^N\times\mathbf{C}^M\to[0,\infty[$, $\Phi(x,y) := p(x)+q(y)$ (ML).

Beweis: 1) ist klar. 2) folgt, indem man durch Ausdünnen und Verkleinern der $(D(n))_{n\in\mathbf{N}}$ und $(E(n))_{n\in\mathbf{N}}$ zu p,q in 1.7 erreicht, daß $D(n) = E(n)$ $(n\in\mathbf{N})$ und dann mit 1.6.6) von den $\|.\|_{D(n),\Phi}$ zu den π-Normen auf $A_p^\circ \hat{\otimes} A_q^\circ$ übergeht und wieder zurück.

Als wesentliches Hilfsmittel zur Untersuchung von abgeschlossenen Unteräumen und Faktorräumen von (FN)- und (DFN)-Räumen haben sich die folgenden Invarianten von Frécheträumen aus Vogt [1],[2] und Vogt-Wagner [1] erwiesen.

Def. 1.12: Sei E ein lokalkonvexer Raum mit einem abzählbaren aufsteigenden Halbnormensystem $(\|.\|_n)_{n\in\mathbf{N}}$ und seien $(\|.\|_n^*)_{n\in\mathbf{N}}$ die durch $\|y\|_n^* := \sup\{|\langle y,x\rangle| \mid \|x\|_n \le 1\}$ auf dem topologischen Dualraum von E definierten Eichfunktionen.

1) E hat (DN), wenn gilt:

$$\exists\, m\in\mathbf{N}\ \forall\, k\in\mathbf{N}\ \exists\, n\in\mathbf{N},\ \varepsilon>0,\ C>0 :\ \|.\|_k^{1+\varepsilon} \le C\|.\|_m^{\varepsilon}\|.\|_n .$$

2) E hat (DN), wenn gilt:

$$\exists\, m\in\mathbf{N},\ \varepsilon>0\ \forall\, k\in\mathbf{N}\ \exists\, n\in\mathbf{N},\ C>0 :\ \|.\|_k^{1+\varepsilon} \le C\|.\|_m^{\varepsilon}\|.\|_n .$$

3) E hat (Ω), wenn gilt:

$$\forall\, p\in\mathbf{N}\ \exists\, q\in\mathbf{N}\ \forall\, k\in\mathbf{N}\ \exists\, C>0,\ d>0 :\ (\|.\|_q^*)^{1+d} \le C\|.\|_k^*(\|.\|_p^*)^d .$$

4) E hat $(\bar{\Omega})$, wenn gilt:

$$\exists\, d>0\ \forall\, p\in\mathbf{N}\ \exists\, q\in\mathbf{N}\ \forall\, k\in\mathbf{N}\ \exists\, C>0 :\ (\|.\|_q^*)^{1+d} \le C\|.\|_k^*(\|.\|_p^*)^d .$$

Satz 1.13: Es gelten:

1) (DN) => (DN) , $(\bar{\Omega})$ => (Ω) .

2) Die Eigenschaften (DN), (DN), (Ω), $(\bar{\Omega})$ hängen nicht von der Wahl des Halbnormensystems $(\|.\|_n)_{n\in\mathbf{N}}$, sondern nur von der Topologie von E ab.

3) (DN), (DN) vererben sich auf abgeschlossene Unterräume von E, (Ω), $(\bar{\Omega})$ auf Quotientenräume nach abgeschlossenen Unterräumen von E.

4) Wenn E nuklear ist, hat E genau dann (DN), wenn E isomorph ist zu einem abgeschlossenen Unterraum von s, dem Raum der schnellfallenden Folgen. Ein nukleares E hat genau dann (Ω), wenn E isomorph ist zu einem Quotienten von s nach einem abgeschlossenen Unterraum.

5) Ist $0 \to E \to F \to G \to 0$ eine exakte Sequenz von Frécheträumen und haben E und G (DN), (DN), (Ω) oder $(\bar{\Omega})$, so hat F die gleiche Eigenschaft.

6) Wenn ein (FN)-Raum $(\bar{\Omega})$ und (DN) hat, ist er endlichdimensional.

Beweis: 1) ist trivial, 2) leicht zu überprüfen, 3) ebenfalls. Für 4) vgl. Vogt-Wagner [1], Satz 1.8 und Vogt [1], Satz 1.7. Zu 5) vgl. Vogt-Wagner [1], Lemma 1.7 für (Ω), Vogt [2], Lemma 2.7 für $(\bar{\Omega})$ und Lemma 3.1 für (DN). Für (DN) läßt sich der Beweis von Lemma 3.1 leicht abwandeln. Ein (FN)-Raum mit $(\bar{\Omega})$ und (DN) ist nach Vogt [2], Satz 1.6 ein Potenzreihenraum von endlichem Typ und nach Vogt [2], Cor. 2.4 zugleich von unendlichem Typ, also endlichdimensional.

Eine wesentliche Eigenschaft von (Ω) und (DN) beschreibt der

Satz 1.14: (Splitting-Theorem von Vogt-Wagner)

Ist $0 \to E \to F \xrightarrow{q} G \to 0$ eine exakte Sequenz von (FN)-Räumen und hat G (DN), E (Ω), dann gibt es $\psi: G \to F$ stetig und linear so, daß $q \circ \psi$ die Identität auf G ist.

Beweis: Siehe Vogt-Wagner [1], Satz 1.4.

Bem. 1.15: Ist p eine projektive Gewichtsfunktion, dann hat A_p° (DN).

Beweis: Es ist $\|f\|_{1/k,p} = \sup_{z \in \mathbb{C}^N} |f(z)| e^{-(1/k)p(z)} =$

$$= \sup_{z \in \mathbb{C}^N} |f(z)|^{\frac{1}{2k}} e^{-\frac{1}{2k}p(z)} |f(z)|^{1-\frac{1}{2k}} e^{-\frac{1}{2k}p(z)} \leq$$

$$\leq \left[\sup_{z \in \mathbb{C}^N} |f(z)| e^{-p(z)}\right]^{\frac{1}{2k}} \left[\sup_{z \in \mathbb{C}^N} |f(z)| e^{-\frac{1}{2k-1}p(z)}\right]^{1-\frac{1}{2k}} =$$

$$= \|f\|_{1,p}^{\frac{1}{2k}} \, \|f\|_{\frac{1}{2k-1},p}^{1-\frac{1}{2k}} \quad \text{für alle } f \in A_p^\circ \ , \ k \in \mathbf{N} \ .$$

Viele der in dieser Arbeit behandelten Räume sind isomorph zu Frécheträumen der folgenden Art.

Def. 1.16. Sei $A := (a_{j,k})_{j,k\in\mathbf{N}}$ mit $\forall\, j,k\in\mathbf{N}: \ 0 < a_{j,k} \le a_{j,k+1}$ gegeben und $E := (E_j, \|.\|_j)_{j\in\mathbf{N}}$ eine Folge von Banachräumen. Dann ist für $1\le q<\infty$

$$\lambda^q(A,E) := \left\{ (x_j)_j \in \prod_{j=1}^{\infty} E_j \,\middle|\, \forall\, k\in\mathbf{N}: \ \left(\sum_{j=1}^{\infty} (\|x_j\|_j a_{j,k})^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}$$

und

$$\lambda^\infty(A,E) := \left\{ (x_j)_j \in \prod_{j\in\mathbf{N}} E_j \,\middle|\, \forall\, k\in\mathbf{N}: \ \sup_{j\in\mathbf{N}} (\|x_j\|_j a_{j,k}) < \infty \right\}.$$

Ist $(E_j, \|.\|_j)_{j\in\mathbf{N}} = (\mathbf{C}, |.|)_{j\in\mathbf{N}}$, schreiben wir auch $\lambda^q(A)$, $\lambda^\infty(A)$; statt $\lambda^1(A)$ auch $\lambda(A)$. Die $\lambda(A)$ heißen Köthesche Folgenräume.

Satz 1.17: 1) Die $\lambda^q(A,E)$ $(1\le q\le\infty)$ sind mit den natürlichen Normen Frécheträume.

2) Es sind äquivalent, wenn $\dim(E_j) < \infty$ $(j\in\mathbf{N})$:

a) $\lambda^\infty(A,E)$ ist nuklear.

b) $\lambda^1(A,E)$ ist nuklear.

c) Es gibt zu jedem $k\in\mathbf{N}$ ein $k'\in\mathbf{N}$ so, daß

$$\sum_{j\in\mathbf{N}} \dim(E_j) \frac{a_{j,k}}{a_{j,k'}} < \infty \ .$$

Unter diesen Umständen gilt für $B := (b_{1,k})_{1,k\in\mathbf{N}}$ mit $b_{1,k} := a_{j,k}$, falls

$$\sum_{m=1}^{j-1} \dim(E_m) < 1 \le \sum_{m=1}^{j} \dim(E_m) \ ,$$

daß $\lambda(B) \cong \lambda^\infty(A,E) = \lambda^1(A,E)$.

Beweis: 1) ist klar, für 2) vgl. Meise [1], p.63ff, Prop. 1.3 und 1.4.

Def. 1.18: Sei $\alpha := (\alpha_j)_{j\in\mathbf{N}}$ mit $0 \le \alpha_j$ $(j\in\mathbf{N})$, $\alpha_j \nearrow \infty$ und sei $E := (E_j, \|.\|_j)_{j\in\mathbf{N}}$ eine Folge von Banachräumen. Dann ist für $R \in \mathbf{R}$, $1 \le q \le \infty$

$$\Lambda_R^q(\alpha,E) := \lambda^q\left(\left(e^{(R-\frac{1}{k})\alpha_j}\right)_{j,k\in\mathbf{N}},E\right) \text{ und}$$

$$\Lambda_\infty^q(\alpha,E) := \lambda^q\left((e^{k\alpha_j})_{j,k\in\mathbf{N}},E\right) .$$

Ist $E = (\mathbf{C},|.|)_{j\in\mathbf{N}}$, schreiben wir auch $\Lambda_R^q(\alpha)$, $\Lambda_\infty^q(\alpha)$; ist $q=1$, auch $\Lambda_R(\alpha)$, $\Lambda_\infty(\alpha)$. Die $\Lambda_\infty(\alpha)$ heißen Potenzreihenräume von unendlichem Typ, die $\Lambda_R(\alpha)$ Potenzreihenräume von endlichem Typ.

Satz 1.19: 1) Für jedes α hat $\Lambda_\infty(\alpha)$ (Ω) und (DN).

2) Für jedes α hat $\Lambda_1(\alpha)$ $(\bar{\Omega})$ und $(\underline{DN})$.

3) Ist E ein (FN)-Raum, der $(\bar{\Omega})$ und $(\underline{DN})$ hat, so ist E isomorph zu einem $\Lambda_1(\alpha)$ für passendes α.

Beweis: Für 1) vgl. Vogt [1], p.115, Cor.2.4 und Vogt-Wagner [1], p.235, Satz 2.5, für 2) Vogt [2], p.7, Lemma 1.5 und für 3) Vogt [2], p.8, Satz 1.6 (der erheblich tiefer ist als die anderen Aussagen in diesem Satz).

Bem. 1.20: Klassische Beispiele von Potenzreihenräumen sind $H(\mathbf{C}^N) \cong \Lambda_\infty((\sqrt[N]{j})_{j\in\mathbf{N}_0})$, $H(\Delta^N) \cong \Lambda_0((\sqrt[N]{j})_{j\in\mathbf{N}_0})$ und $s = \Lambda_\infty((\log j)_{j\in\mathbf{N}})$, wobei die ersten beiden Isomorphismen durch Taylorentwicklung in 0 entstehen.

Im nächsten Kapitel wird es von großer Bedeutung sein, zu wissen, wann A_p° (DN) hat. Im Falle, daß p komponentenweise radial ist, geben uns 1.21 und 1.25 Kriterien dafür.

Satz 1.21: Ist p eine komponentenweise radiale projektive Gewichtsfunktion auf $\mathbf{C}^N$, die 1.1.2''') erfüllt, dann ist $A_p^\circ \cong H(\mathbf{C}^N)$ als topologischer Vektorraum, wobei der Isomorphismus durch eine Diagonaltransformation auf den Monomen induziert wird. Insbesondere hat A_p° (DN) und (Ω).

Beweis : Für N=1 vgl. Meise-Taylor [1], die Verallgemeinerung auf beliebiges N ist trivial.

Bem. 1.22: Sei p eine stetige projektive Gewichtsfunktion auf $\mathbf{C}^N$ und komponentenweise radial, sei $\varphi: \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ definiert durch

$$\varphi(t_1,\ldots,t_N) := p(e^{t_1},\ldots,e^{t_N}) .$$

Dann erfüllt φ:

1) φ ist konvex.

2) Es gibt $R \geq 0$ so, daß für alle $t \in [0,\infty[^N$, $|t| \geq 1$

$$\lambda \mapsto \varphi(\lambda t)$$

wachsend ist und für $\lambda \geq R$ sogar strikt wachsend.

3) $|t| = o(\varphi(t))$ für $t \in [0,\infty[^N$.

Beweis : 1) folgt daraus, daß p plurisubharmonisch und komponentenweise radial ist, $z \mapsto \log(|u(z)|)$ aber für jede Linearform u harmonisch ist außerhalb von ker u. 2) und 3) folgen aus 1.1.3) und der Plurisubharmonizität von p.

Bem, 1.23: Sei φ wie in 1.22 gegeben und sei

$\varphi^*(w) := \sup \{\langle w,t\rangle - \varphi(t) | t \in [0,\infty[^N\}$ für $w \in [0,\infty[^N$ und $\langle w,t\rangle := \sum w_j t_j$. Dann gilt:

1) φ^* ist konvex.

2) Es gibt ein $R \geq 0$ so, daß für alle $t \in [0,\infty[^N$, $|t| \geq 1$

$$\lambda \mapsto \varphi^*(\lambda t)$$

wachsend ist und für $\lambda \geq R$ sogar strikt wachsend.

3) $|t| = o(\varphi^*(t))$

4) $(\varphi^*)^* = \varphi$.

Beweis: Standardtheorie konvexer Funktionen. Vgl. z.B. Krasnosel'skii-Rutickii [1], cp.I, §2 für den Fall N=1 und Rockafellar [1], Th. 12.2, p.104 für den allgemeinen Fall.

Satz 1.24: Ist p eine komponentenweise radiale projektive Gewichtsfunktion und erfüllt 1.1.2''), sind weiter φ, φ^* wie in 1.22 und 1.23 konstruiert, dann ist für $A := (a_{j,k})_{j\in(\mathbf{N}_o)^N, k\in\mathbf{N}}$ mit

$$a_{j,k} := e^{\frac{1}{k}\varphi^*(kj_1,\ldots,kj_N)} \qquad A_p^\infty \cong \lambda(A).$$

Beweis: Vgl. Meise-Taylor [1], Prop. 1.10 für den Fall N=1. Für N>1 ist dieser Beweis leicht zu adaptieren.

Korollar 1.25: Unter den Bedingungen von Satz 1.24 hat A_p^∞ genau dann (DN), wenn gilt:

$$\exists\, m\in\mathbf{N}\ \forall\, k\in\mathbf{N}\ \exists\, n\in\mathbf{N}, D<\infty\ \forall\, j\in(\mathbf{N}_o)^N\quad \tfrac{2}{k}\varphi^*(kj) \le \tfrac{1}{m}\varphi^*(mj)+\tfrac{1}{n}\varphi^*(nj)+D.$$

Beweis: Wende Vogt [1], Satz 2.3, p.115 auf Satz 1.24 an.

Beispiele 1.26: 1) Sei $N = N_1+N_2$, seien $p_i: \mathbf{C}^{N_i} \to [0,\infty[$ komponentenweise radiale projektive Gewichtsfunktionen und sei $P(z_1,z_2) := p_1(z_1)+p_2(z_2)$ auf $\mathbf{C}^N$, dann ist $\varphi^* = \varphi_1^*+\varphi_2^*$, wenn

$$\varphi(t) := p(e^{t_1},\ldots,e^{t_N}),\ \varphi_1(t_1,\ldots,t_{N_1}) := p_1(e^{t_1},\ldots,e^{t_{N_1}}) \text{ und}$$

$$\varphi_2(t_{N_1+1},\ldots,t_N) := p_2(e^{t_{N_1+1}},\ldots,e^{t_N}).$$

2) Wenn $p(z) := \log^\alpha(1+|z|^2)$ für $\alpha>1$, ist mit $\beta := \frac{\alpha}{\alpha-1}$ $\quad \varphi^*(t) = \frac{1}{\beta}|t|^\beta$ und also für $j \in (\mathbf{N}_o)^N$, $k \in \mathbf{N}$

$$a_{j,k} = e^{(\frac{1}{\beta}k^{\beta-1})|j|^\beta}.$$

Folglich ist $A_p^\infty \cong \Lambda_\infty((j^\beta)_{j\in\mathbf{N}_o})$ und hat insbesondere (DN) und (Ω). Vgl. dazu Meise-Taylor [1], Ex.1.13, p.7.

KAPITEL 2

In diesem Kapitel untersuchen wir die Struktur von Quotientenräumen modulo abgeschlossenen Idealen I in A_p°.

Theorem 2.18 erlaubt die Darstellung von A_p°/I durch Daten auf 'nicht zu kleinen' Umgebungen der Nullstellenvarietät von I. Zum Einen führt das zu Theorem 2.20, einem Satz über die Interpolation in A_p° von holomorphen Funktionen auf Mannigfaltigkeiten. Zum Anderen zeigen wir damit in Theorem 2.26, daß A_p°/I oft ein Potenzreihenraum von endlichem Typ ist.

2.1 Im Folgenden seien eine projektive Gewichtsfunktion p auf $\mathbf{C}^N$ und $F = (F_1,\dots,F_M) \in (A_p^\circ\setminus\{0\})^M$ fest gegeben und sei

$$|F| := \left(\sum_{i=1}^{M} |F_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Wir bauen in 2.2 bis 2.9 den Koszulkomplex gemäß z.B. Hörmander [1] und Kelleher-Taylor [1] so auf, daß wir in jedem Schritt der späteren Diagrammjagden die dann benötigten Abschätzungen festhalten können.

Def. 2.2: Es sei für $r \in \mathbf{N}$

$$J_r := \{(i_1,\dots,i_r) | i_1<i_2<\dots<i_r,\ i_1,\dots,i_r \in \{1,\dots,N\}\}.$$

Für $l = (i_1,\dots,i_r) \in J_r$ sei $d\bar{z}_l := d\bar{z}_{i_1}\wedge\dots\wedge d\bar{z}_{i_r}$.

Ist G eine offenen Teilmenge von $\mathbf{C}^N$, können wir also jedes Element f von $D'_{(0,r)}(G)$ darstellen als $f = \sum_{l\in J_r} f_l d\bar{z}_l$.

Für ein Holomorphiegebiet $G \subset \mathbf{C}^N$, $r,k \in \mathbf{N}$ und $\varepsilon>0$ sei $L_r(k,\varepsilon;G)$ der Raum all der $f \in D'_{(o,r)}(G)$, die mit jedem ihrer Koeffizienten f_l ($l \in J_r$) erfüllen:

1) f_l ist eine lokal quadratintegrierbare Funktion bez. des Lebesguemaßes auf G.

2) $$\|f_l\|_{(k,\varepsilon;G)} := \left(\int_G |f_l|^2 e^{-2\varepsilon p}|F|^{-2k}\, d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} < \infty .$$

Bem. 2.3: $L_r(k,\varepsilon;G)$ wird mit der Norm $f \mapsto \left(\sum_{l \in J_r} \|f_l\|^2_{(k,\varepsilon;G)} \right)^{\frac{1}{2}}$ zu einem Hilbertraum.

Def. 2.4: Sei für $s \geq 1$ $\Lambda^s(\mathbb{C}^M)$ der Raum der alternierenden s-Linearformen auf $\mathbb{C}^M$, sei $x_1, \ldots, x_M$ eine Basis des Dualraums von $\mathbb{C}^M$ und $B_s := \{x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_s} \mid i_1 < i_2 < \ldots < i_s,\ i_1, \ldots, i_s \in \{1, \ldots, M\}\}$ die zugehörige Basis von $\Lambda^s(\mathbb{C}^M)$. Seien weiter $\Lambda^{-1}(\mathbb{C}^M) := \{0\}$, $B_{-1} := \emptyset$, $\Lambda_0(\mathbb{C}^M) := \mathbb{C}$, $B_0 := \{1\}$.

Für $s \geq -1$, $s \in \mathbb{Z}$, k, ε, G wie in 2.2 sei

$$L_{r,s}(k,\varepsilon;G) := \Lambda^s(\mathbb{C}^M) \otimes_{\mathbb{C}} L_r(k,\varepsilon;G).$$

Jedes $g \in L_{r,s}(k,\varepsilon;G)$ für $s \in \mathbb{N}_0$ läßt sich also schreiben als

$$g = \sum_{b \in B_s} b \otimes g_b \ , \text{ wo } g_b \in L_r(k,\varepsilon;G).$$

Bem. 2.5: $L_{r,s}(k,\varepsilon;G)$ wird mit der natürlichen Norm zu einem Hilbertraum.

Für $i_1, \ldots, i_s \in \{1, \ldots, M\}$ und $g \in L_{r,s}(k,\varepsilon;G)$ sei
$g(i_1, \ldots, i_s) := 0$,
wenn die $i_1, \ldots, i_s$ nicht paarweise verschieden sind,
und ansonsten

$$g(i_1, \ldots, i_s) := \operatorname{sgn}\pi \; g_{(x_{i_{\pi(1)}} \wedge \ldots \wedge x_{i_{\pi(s)}})} \ ,$$

wenn $\pi \in \mathfrak{S}_s$ die Permutation ist, die $i_1, \ldots, i_s$ aufsteigend ordnet.

Def. 2.6: Seien $s \in \mathbb{Z}$, $s \geq -1$, r, k, ε, G wie in 2.2 .

$P_F : L_{r,s+1}(k,\varepsilon;G) \longrightarrow L_{r,s}(k+1,\varepsilon;G)$ ist definiert durch
$(P_F(g))(i_1, \ldots, i_s) := \sum_{j=1}^{M} F_j g(i_1, \ldots, i_s, j)$ für $s \geq 0$ und
$P_F := 0$ für $s = -1$.

Bem. 2.7: P_F ist wohldefiniert und stetig. Für $s = -1$ ist das trivial, und wenn $s \geq 0$, $i_1, \ldots, i_s \in \{1, \ldots, M\}$, gilt für jeden Koeffizienten $(P_F(g))(i_1, \ldots, i_s)_l$ der $(0,r)$-Form $(P_F(g))(i_1, \ldots, i_s)$, daß

$$|(P_F(g))(i_1,\ldots,i_s)_l|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{M}|g(i_1,\ldots,i_s,j)_l|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{M}|F_j|^2\right)$$

und also

$$\int_G |(P_F(g))(i_1,\ldots,i_s)_l|^2 e^{-2\varepsilon p_{|F|}} |F|^{-2k-2} d\lambda \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{M} \int_G |g(i_1,\ldots,i_s,j)_l|^2 e^{-2\varepsilon p_{|F|}} |F|^{-2k} d\lambda < \infty .$$

Def. 2.8: Es seien r,k,ε,G,s wie in 2.4. Dann setzen wir

$$A_r(k,\varepsilon;G) := \{f \in L_r(k,\varepsilon;G) \mid \forall\, l\in J_r : f_l \in H(\mathbb{C}^N)\},$$

$$A_{r,s}(k,\varepsilon;G) := \Lambda^s(\mathbb{C}^M) \otimes_{\mathbb{C}} A_r(k,\varepsilon;G) .$$

Wir schreiben auch $L_{r,s}(k,\varepsilon)$, $A_{r,s}(k,\varepsilon)$ etc. anstatt $L_{r,s}(k,\varepsilon;\mathbb{C}^N)$, $A_{r,s}(k,\varepsilon;\mathbb{C}^N)$.

Def. 2.9: Seien r,k,ε,G,s wie in 2.4, dann ist

$$\bar\partial: L_{r,s}(k,\varepsilon;G) \longrightarrow \Lambda^s(\mathbb{C}^M) \otimes_{\mathbb{C}} D'_{(0,r+1)}(G) \text{ durch}$$

$$(\bar\partial g)(i_1,\ldots,i_s) := \bar\partial(g(i_1,\ldots,i_s))$$

im Sinne des Distributionenkalküls für alle $i_1,\ldots,i_s \in \{1,\ldots,M\}$ definiert.

Bem. 2.10: 1) Es ist $A_{0,s}(k,\varepsilon;G) = \ker\bar\partial$ in $L_{0,s}(k,\varepsilon;G)$ für alle s.
2) Wo immer die Verknüpfungen definiert sind, gilt:
a) $\bar\partial\circ\bar\partial=0$; b) $P_F\circ P_F = 0$; c) $\bar\partial\circ P_F = P_F\circ\bar\partial$.

Beweis: 1) folgt aus Hörmander [2], Th. 4.2.5 und dem Sobolevlemma (vgl. auch Hörmander [2], Cor. 4.2.6). 2) ist direkt nachzurechnen.

Vergleiche hierfür auch Hörmander [1], p.945f.

Für den Beweis von Theorem 2.18 und Theorem 2.37 brauchen wir die folgenden vier grundlegenden Theoreme über diesen Koszulkomplex.

Satz 2.11: (Skoda) Für $\varepsilon > 0$, $k \geq \min(N+1,M)$ und ein Holomorphiegebiet G in $\mathbb{C}^N$ ist

$$P_F: A_{0,1}(k,\varepsilon;G) \longrightarrow A_{0,0}(k+1,\varepsilon;G) \text{ surjektiv.}$$

Beweis: Daß P_F wohldefiniert ist, haben wir in Bem. 2.7 nachgerechnet. Daß P_F surjektiv ist, folgt aus Skoda [1], Th.1, p.955f, wenn man dort $\alpha := k(\min(N,M-1))^{-1}$ setzt.

Satz 2.12: (Hörmander) Für $\varepsilon'>\varepsilon>0$, $k,s\geq 0$, $r\geq 1$ und ein Holomorphiegebiet G in $\mathbb{C}^N$ gibt es für jedes $f \in L_{r,s}(k,\varepsilon;G)$ mit $\bar\partial f = 0$ ein $g \in L_{r-1,s}(k,\varepsilon;G)$ mit $\bar\partial g = f$.

Beweis: Da aus 1.1.3) folgt, daß es $C < \infty$ gibt mit $\log(1+|z|^2) \leq (\varepsilon'-\varepsilon)p(z)+C$ $(z \in \mathbb{C}^N)$, folgt der Satz sofort aus Hörmander [2], Th. 4.4.2, p.94.

Satz 2.13: (Kelleher-Taylor) Für $\varepsilon'>\varepsilon>0$, $k\geq 1$, $r,s\geq 0$ gibt es für jedes $f \in L_{r,s}(k,\varepsilon)$ mit $P_F f = 0$ ein $g \in L_{r,s+1}(k-1,\varepsilon')$ so, daß $P_F g = f$.

Ist dazu $k\geq 2$, $\bar\partial f = 0$, dann ist g so wählbar, daß zusätzlich $\bar\partial g \in L_{r+1,s+1}(k-2,\varepsilon')$.

Beweis: (vgl. Kelleher-Taylor [1], Prop. 2.5, p.228)

Setze für $J := (i_1,\ldots,i_{s+1}) \in \{1,\ldots,M\}^{s+1}$

$$J_k := (i_1,\ldots,i_{k-1},i_{k+1},\ldots,i_{s+1})$$

und definiere g durch

$$g_J := |F|^{-2} \sum_{k=1}^{s+1} (-1)^{s+1-k} \overline{F_{i_k}} f_{J_k} \quad \text{für alle } J.$$

Das ergibt ein Element von $L_{r,s+1}(k-1,\varepsilon')$ für jedes $\varepsilon'>\varepsilon$, welches $P_F g = f$ erfüllt.

Ist $k\geq 2$, $\bar\partial f = 0$, so erhalten wir für g noch

$$\bar\partial g_J = \sum_{k=1}^{s+1} (-1)^{s+1-k} |F|^{-4} \sum_{j=1}^{M} F_j \overline{(F_j \partial F_{i_k} - F_{i_k} \partial F_j)} \wedge f_{J_k} \quad \text{für alle } J.$$

Mit F_j ist wegen 1.6.5) auch $\partial_i F_j \in A_p^\circ$ für alle i,j und also $\bar\partial g \in L_{r+1,s+1}(k-2,\varepsilon')$.

Satz 2.14: (Hörmander) Für $\varepsilon'>\varepsilon>0$, $r,s\geq 0$, $k\geq v:=\min(N-r+1,M-s+1)$ gibt es für jedes $f \in L_{r,s}(k,\varepsilon)$ mit $\bar\partial f = 0$, $P_F f = 0$ ein $g \in L_{r,s+1}(k-v,\varepsilon')$ mit $\bar\partial g = 0$, $P_F g = f$.

Beweis: (Nachvollziehen der Diagrammjagd in Hörmander [1], Th.7 mit Abschätzungen)

Für $v\leq 0$, also $r>N$ oder $s>M$ ist $f \equiv 0$, und $g \equiv 0$ erfüllt alles, was verlangt wird. Dies gibt uns die Verankerung für einen Induktionsbeweis. Wir nehmen an, der Satz gelte schon für $r'>r$, $s'\geq s$ sowie $r'\geq r$, $s'>s$ und setzen $v>0$ voraus.

Mit 2.13 finden wir zu f und $\varepsilon<\varepsilon''<\varepsilon'$ ein $g' \in L_{r,s+1}(k-1,\varepsilon'')$ mit $P_F g' = f$ und $\bar\partial g' \in L_{r+1,s+1}(k-2,\varepsilon'')$. Es gilt dann $\bar\partial(\bar\partial g') = 0$, $P_F(\bar\partial g') = \bar\partial(P_F g) = \bar\partial f = 0$, nach der Induktionsvoraussetzung gibt es also für $\varepsilon'''<\varepsilon''<\varepsilon'$ ein $g''\in L_{r+1,s+1}(k-2-(v-1),\varepsilon''')$ mit $P_F g'' = \bar\partial g'$, $\bar\partial g'' = 0$. Wegen 2.12 finden wir weiter $g''' \in L_{r,s+2}(k-v-1,\varepsilon')$ mit $\bar\partial g''' = g''$.

Für $g := g'-P_F g'''$ folgt dann $P_F g = P_F g' = f$, $\bar\partial g = \bar\partial g'-\bar\partial P_F g''' = \bar\partial g'-P_F g'' = 0$ und $g \in L_{r,s+1}(k-v,\varepsilon')$, da nach 2.7 $P_F g''' \in L_{r,s+1}(k-v,\varepsilon')$, während $L_{r,s+1}(k-1,\varepsilon'') \subset L_{r,s+1}(k-v,\varepsilon')$ leicht nachzurechnen ist.

Die Beweise von 2.18 und 2.37 unterscheiden sich von denen im induktiven Fall vor allem dadurch, daß wir das nächste Lemma anwenden müssen.

Lemma 2.15: (Mittag-Leffler-Lemma, Komatsu) Seien X_j Frécheträume, Y_j, Z_j $\mathbf{C}$-Vektorräume für $j\in\mathbf{N}$, $Z_{j+1}\subset Z_j$, $Y_{j+1}\subset Y_j$ und $X_{j+1}\subset X_j$ mit stetiger Inklusion für alle $j\in\mathbf{N}$ und

$$0 \longrightarrow X_j \xrightarrow{\varphi_j} Y_j \xrightarrow{\psi_j} Z_j \longrightarrow 0$$

exakte Sequenzen von Vektorräumen so, daß für alle $j\in\mathbf{N}$, $x\in X_{j+1}$, $y\in Y_{j+1}$ $\varphi_j(x) = \varphi_{j+1}(x)$, $\psi_j(y) = \psi_{j+1}(y)$.

Dann ist der projektive Limes dieser Sequenzen exakt, wenn für alle $j\in\mathbf{N}$ X_{j+2} in X_{j+1} dicht liegt bezüglich der Topologie von X_j.

Beweis: siehe Komatsu [1], Lemma 1.3.

Def. 2.16: Für $\rho: \mathbb{C}^N \to [0,\infty[$ oberhalbstetig sei

$$S_\rho(F) := \{ z \in \mathbb{C}^N \mid |F|(z) < e^{-\rho(z)} \}.$$

Ist ρ plurisubharmonisch, wird $S_\rho(F)$ also ein Holomorphiegebiet.

Lemma 2.17: Sei $\rho: \mathbb{C}^N \to [0,\infty[$ oberhalbstetig, $\rho = o(p)$, und seien $G_1,\dots,G_L \in A_p^o$. Dann gibt es ein oberhalbstetiges $\rho': \mathbb{C}^N \to [0,\infty[$ mit $\rho' = o(p)$, $\rho' > \rho$ so, daß $|G_1|,\dots,|G_L| < e^{\rho'}$ auf $\mathbb{C}^N$ und für $z \in S_{\rho'}(F)$ gilt

$$-\log(d(z,S_\rho(F)^c)) = o(p(z)).$$

Beweis: Es gibt eine Folge $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

1) $1 < D_n < D_n+1 < D_{n+1} < \infty$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

2) Falls $|z|>D_n$, sind $\rho(z), \log|G_j(z)| < \frac{1}{n}p(z)$ $(n\in\mathbb{N}, j=1,\dots,L)$.

Ist C die Konstante von 1.1.2) für p, dann sei

$\tilde{\rho}(z) := \frac{C}{n-1}p(z) + C + \log 2$ für $D_n < |z| \le D_{n+1}$, $n\ge 2$,

$\tilde{\rho}(z) := 1+\rho(z)$, wenn $|z| \le D_2$

und $\rho'(z) := \limsup_{y\to z} \tilde{\rho}(y)$ die obere Regularisierte von $\tilde{\rho}$.

Für alle $z\in\mathbb{C}^N$ sind dann offenbar $\rho(z), \log|G_j(z)| < \rho'(z)$ $(j=1,\dots,L)$, und $\rho' = o(p)$ folgt aus $\tilde{\rho} = o(p)$.

Seien r aus 1.1.2) zu p, $m\in\mathbb{N}$, $m\ge 3$ vorgegeben und $\varepsilon_m := \frac{2C}{m-1}$, sei $x \in S_\rho(F)^c$, $z \in S_{\rho'}(F)$, dann unterscheiden wir drei Fälle:

A) $d(x,z) \ge e^{-r(z)}$

Dann können wir wegen $r=o(p)$ $C_m>0$ finden so, daß

$$e^{-r(z)} \ge C_m e^{-\varepsilon_m p(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^N.$$

B) $d(x,z) < e^{-r(z)}$ und $|z|,|x| \le D_m$:

Dann sind $S_{\rho'}(F)\cap\{z \mid |z|\le D_m\}$ und $S_\rho(F)^c\cap\{z \mid |z|\le D_m\}$ disjunkte Kompakta in $\mathbb{C}^N$, die also positiven Abstand d_m haben, und es ist

$$d(x,z) \ge d_m \ge d_m e^{-\varepsilon_m p(z)}.$$

C) $d(x,z) < e^{-r(z)}$ und $|z| \geq D_m$ oder $|x| \geq D_m$.

Dann gibt es ein $n \geq m$ mit $D_{n-1} \leq |x|, |z| \leq D_{n+1}$ wegen 1). Folglich gelten

$$|F(x)| \geq e^{-\frac{1}{n-1}p(x)}, \quad |F(z)| < \frac{1}{2}e^{-C}e^{-\frac{C}{n-1}p(z)}.$$

Weiter gibt es eine nur von N,M abhängige Konstante $C_{N,M}$ so, daß

$$d(x,z) \geq C_{N,M}\frac{|F(x)-F(z)|}{\max|\partial_j F_i(y)|},$$

wo das Maximum über alle y aus der Strecke [x,z] und alle i,j gebildet wird.

Wir finden dann $A_m < \infty$ so, daß $|\partial_j F_i| \leq A_m e^{\frac{1}{m-1}p}$ für alle $i=1,\ldots,M$, $j=1,\ldots,N$ auf $\mathbb{C}^N$, und also:

$$d(x,y) \geq C_{N,M}\frac{e^{-\frac{C}{n-1}p(z)-\frac{C}{n-1}-\frac{1}{2}e^{-C}e^{-\frac{C}{n-1}p(z)}}}{A_m e^{\frac{C}{m-1}p(z)+\frac{C}{m-1}}}$$

wegen 1.1.2), folglich auch, weil $m \geq n$

$$d(x,z) \geq C_{N,M}\frac{e^{-\frac{C}{m-1}p(z)-C}}{2A_m e^{\frac{C}{m-1}}e^{\frac{C}{m-1}p(z)}} \geq C(N,M,m)e^{-\varepsilon_m p(z)}, \quad C(N,M,m)>0.$$

Zusammen haben wir für alle $x \in S_\rho(F)^C$, $z \in S_{\rho'}(F)$:

$$d(x,z) \geq \min(C_m, d_m, C(N,M,m))e^{-\varepsilon_m p(z)},$$

und da $\varepsilon_m \longrightarrow 0$ für $m \longrightarrow \infty$, ist alles gezeigt.

Theorem 2.18: p habe (ML) und ρ: $\mathbb{C}^N \longrightarrow [0,\infty[$ sei oberhalbstetig mit $\rho = o(p)$, dann gibt es ρ': $\mathbb{C}^N \longrightarrow [0,\infty[$ oberhalbstetig, $\rho' > \rho$, $\rho' = o(p)$, für das gilt:

Sei $\tilde{f} \in H(S_\rho(F))$ mit $\sup\{|\tilde{f}(z)|e^{-\varepsilon p(z)} \mid z \in S_\rho(F)\} < \infty$ für alle $\varepsilon>0$, dann gibt es für alle $s \in \mathbb{N}$ ein $f \in A_p^o$ so, daß für alle Holomorphiegebiete $G \subset S_{\rho'}(F)$ und für alle $\varepsilon>0$ Funktionen $a_i \in A_{0,0}(s,\varepsilon;G)$ $(i=1,\ldots,M)$ existieren mit

$$\sum_{i=1}^{M} a_i F_i|_G = f|_G - \tilde{f}|_G.$$

Beweis: Wir nehmen als ρ' das in 2.17 (ohne alle G_j) konstruierte ρ'. Wegen der Abschätzung dort gibt es also ein $\gamma \in C^\infty(\mathbb{C}^N)$ mit $0 \le \gamma \le 1$,

$$\gamma|_{S_{\rho'}(F)} \equiv 1, \quad \gamma|_{\hat{S}_\rho(F)^c} \equiv 0$$

so, daß für alle Koeffizienten $(\bar\partial\gamma)_1$ von $\bar\partial\gamma$ und alle $\varepsilon>0$ gilt

$$\sup_{z\in\mathbb{C}^N} |(\bar\partial\gamma)_1(z)|e^{-\varepsilon p(z)} < \infty.$$

Es ist also $\bar\partial(\tilde f\gamma) = \tilde f\bar\partial\gamma \in \bigcap_{\varepsilon>0} L_{1,0}(k,\varepsilon)$,

und da $\bar\partial\gamma|_{S_{\rho'}(F)} \equiv 0$, erhalten wir:

$$\sup\{|F(z)|^{-k}e^{-\varepsilon p(z)} | z\in\mathbb{C}^N, \bar\partial\gamma(z)\neq 0\} < \sup\{e^{k\rho'(z)-\varepsilon p(z)} | z\in\mathbb{C}^N\} < \infty$$

für alle $\varepsilon>0$, $k\in\mathbf{N}$, so daß sogar

$$\bar\partial(\tilde f\gamma) \in \bigcap_{\substack{\varepsilon>0\\ k\in\mathbf{N}}} L_{1,0}(k,\varepsilon).$$

Für $A := \{\xi\in C^\infty(\mathbb{C}^N) | \bar\partial\xi \in \bigcap_{k,\varepsilon} L_{1,0}(k,\varepsilon)\}$

sei $$Z := \left\{ [\xi]\in C^\infty(\mathbb{C}^N)/_{H(\mathbb{C}^N)} \,\middle|\, \xi\in A \right\},$$

wo [.] die Äquivalenzklasse modulo $H(\mathbb{C}^N)$ bezeichnet.

Weiter definieren wir für $k,s \in \mathbf{N}$

$$R_F: (A_0(k-1,\varepsilon))^{(M^s)} \longrightarrow (A_0(k,\varepsilon))^{(M^{s-1})} \text{ durch}$$

$$(R_F(g))(j_1,\dots,j_{s-1}) := \sum_{l=1}^{M} F_l g(j_1,\dots,j_{s-1},l).$$

R_F ist wohldefiniert und für $k \ge \min(N+1,M)$ surjektiv wegen 2.11.

Wir setzen für $k,s \in \mathbf{N}$, $\varepsilon > 0$:

$$Z(k,\varepsilon,s) := \{u\in L_{0,1}(k,\varepsilon) | P_F u=0\} + (R_F)^s(A_0(0,\varepsilon)^{(M^{s+1})}).$$

Weil für $k \ge s$ dann $\sup_{z\in\mathbb{C}^N} |F(z)|^{k-s}e^{-\varepsilon' p(z)} < \infty$ für alle $\varepsilon'>0$, folgt mit kurzer Rechnung, daß

$$Z(k,\varepsilon,s) \supset \{u\in L_{0,1}(k,\varepsilon) | P_F u=0\} + (R_F)^s(A_0(k-s,\tfrac12\varepsilon)^{(M^{s+1})}).$$

Falls $k \ge s + \min(N+1,M)$, haben wir weiter

$(R_F)^s(A_0(k-s,\tfrac12\varepsilon)^{(M^{s+1})}) = A_{0,1}(k,\tfrac12\varepsilon)$, wenn wir $A_0(k,\tfrac12\varepsilon)^M$ auf offensichtliche Weise mit $A_{0,1}(k,\tfrac12\varepsilon)$ identifizieren und die Surjektivität von R_F in diesem Fall ausnutzen.

Als nächstes zeigen wir den

Hilfssatz: $[P_F.]$

$0 \longrightarrow Z(k-1,2\varepsilon,s) \longrightarrow \{u\in L_{0,1}(k,\varepsilon) \mid [P_F u]\in Z\} + Z(k-1,2\varepsilon,s) \longrightarrow Z \longrightarrow 0$

ist exakt für alle $\varepsilon>0$ und $s,k\in\mathbf{N}$ mit $k-s \geq 1+\min(N+1,M)$.

Beweis: Sei $v := \min(N+1,M)$, dann ist für $\xi \in A$ $\bar\partial\xi \in L_1(k+v,\tfrac{1}{4}\varepsilon)$ und es gibt wegen 2.14 ein $h \in L_{1,1}(k,\tfrac{1}{2}\varepsilon)$ mit $\bar\partial h = 0$, $P_F h = \bar\partial\xi$ und wegen 2.12 ein $u \in L_{0,1}(k,\varepsilon)$ mit $\partial u = h$. Jetzt ist $\bar\partial(\xi - P_F u) = \bar\partial\xi - P_F \partial u = 0$ und folglich die Abbildung $[P_F.]$ im Diagramm surjektiv.

Weil $k \geq \min(N+1,M)$, folgt aus 2.11 für $h \in \ker[P_F.]$, daß es ein $w \in A_{0,1}(k-1,\varepsilon)$ mit $P_F w = P_F h$ gibt. Also liegt $\ker[P_F.]$ in $\{u\in L_{0,1}(k-1,\varepsilon) \mid P_F u=0\} + A_{0,1}(k-1,\varepsilon)$, welche Menge für $k \geq s+1+v$ wieder in $Z(k-1,2\varepsilon,s)$ liegt.

Wir können $Z(k,\varepsilon,s)$ zu einem Hilbertraum machen, indem wir es mit der feinsten lokalkonvexen Topologie versehen so, daß die natürliche Abbildung

$$W(k,\varepsilon,s) := \{u\in L_{0,1}(k,\varepsilon) \mid P_F u=0\} \oplus (A_0(0,\varepsilon))^{(M^{s+1})} \longrightarrow Z(k,\varepsilon,s)$$

stetig ist.

Sei V die Nullstellenvarietät von $F_1 F_2 \ldots F_M$, sei weiter U der Raum aller quadratintegrierbaren komplexwertigen Funktionen auf $\mathbf{C}^N$, die gleich Null sind außerhalb eines Kompaktums, das V nicht trifft. Sei $(K_j)_{j\in\mathbf{N}}$ eine Folge von Kompakta in $\mathbf{C}^N\backslash V$ so, daß

$$K_j \subset K_{j+1} \ (j\in\mathbf{N}), \ \bigcup_{j\in\mathbf{N}} K_j = \mathbf{C}^N\backslash V,$$

und sei für $i=1,\ldots,M$, $j\in\mathbf{N}$ und $u = (u_i)_{i=1,\ldots,M} \in L_{0,1}(k,\varepsilon)$ mit $P_F u=0$ definiert

$$v_{i,j}(z) := u_i(z) \text{ für } z \in K_j,$$
$$v_{i,j}(z) := 0 \text{ sonst.}$$

Dann sind die $v_{i,j}$ aus U und es gilt für alle $j\in\mathbf{N}$

$$\sum_{i=1}^{M} F_i v_{i,j} = 0.$$

Wegen des Satzes der beschränkten Konvergenz und weil V eine Nullmenge ist konvergieren die $(v_{i,j})_i$ gegen $(u_i)_i$ in $L_{0.1}(k,\varepsilon)$. Also ist $\{v=(v_i)_{i=1,\ldots,M} \in U\times\ldots\times U \mid P_F v=0\}$ dicht in $\{u \in L_{0,1}(k,\varepsilon) \mid P_F u=0\}$ für alle $\varepsilon>0$, $k\in\mathbf{N}$.

Weil p die Eigenschaft (ML) hat, gibt es eine Folge $(\varepsilon(n))_{n\in\mathbf{N}}$ mit $\varepsilon(n)\downarrow 0$, $\varepsilon(n)>0$ $(n\in\mathbf{N})$ so, daß $W_{\varepsilon(n+2),p} = A_0(0,\varepsilon(n+2))$ in $A_0(0,\varepsilon(n+1))$ bezüglich der Topologie von $A_0(0,\varepsilon(n))$ dicht liegt für alle $n\in\mathbf{N}$.

Insgesamt sehen wir also, daß für alle $n\in\mathbf{N}$, $k,s\in\mathbf{N}_0$ der Raum $W(k,\varepsilon(n+2),s)$ dicht liegt in $W(k,\varepsilon(n+1),s)$ bezüglich der Topologie von $W(k,\varepsilon(n),s)$, und also auch $Z(k,\varepsilon(n+2),s)$ in $Z(k,\varepsilon(n+1),s)$ bezüglich der Topologie von $Z(k,\varepsilon(n),s)$. Weiter ist leicht nachzurechnen, daß für alle n,k,s die Inklusion

$$Z(k,\varepsilon(n+1),s) \longrightarrow Z(k,\varepsilon(n),s)$$

stetig ist. Wir können folglich 2.15 auf die Sequenz des Hilfssatzes anwenden.

Es ist also für $s\in\mathbf{N}$ und $k\in\mathbf{N}$ mit $k-s \geq 1+\min(N+1,M)$ surjektiv:

$$[P_F.]: \bigcap_{\varepsilon>0}\{u\in L_{0,1}(k,\varepsilon) \mid [P_F u]\in Z\} + Z(k-1,2\varepsilon,s) \longrightarrow Z \cap \bigcap_{\varepsilon>0} L_{0,1}(s,2\varepsilon),$$

wobei die Inklusion gilt, weil

$$(R_F)^s(A_0(0,2\varepsilon)^{(M^{s+1})}) \subset A_{0,1}(s,2\varepsilon).$$

Weil $\tilde{f}_\gamma$ in A liegt, gibt es also $u \in \bigcap_{\varepsilon>0} L_{0,1}(s,\varepsilon)$ mit

$$f := \tilde{f}_\gamma - P_F u \in A_p^\circ.$$

$P_F u$ ist also auf $S_{\rho'}(F)$ holomorph, da $\tilde{f}_\gamma$ dort holomorph ist.

Sei dann G ein Holomorphiegebiet in $S_{\rho'}(F)$. Weil sonst

$$A_{0,1}(s,\varepsilon;G) \supset A_{0,1}(\min(N+1,M),\tfrac{1}{2}\varepsilon;G),$$

ist o.E. $s \geq \min(N+1,M)$. Wegen 2.11 gibt es dann $a \in A_{0,1}(s,\varepsilon;G)$ mit $P_F a = P_F u|_G$ und also

$$f|_G = \tilde{f} - P_F(a|_G).$$

Damit ist das Theorem bewiesen.

Bemerkung 2.19: Für G wird man oft $S_q(F)$ mit einem plurisubharmonischen q auf $S_{\rho'}(F)$, $q > \rho'$ (z.B. $q = \varepsilon p + C_\varepsilon$ für $\varepsilon>0$ und C_ε dazu passend) nehmen.

Für dieses Theorem im induktiven Fall vgl. Berenstein-Taylor [2], Th.2.2., p.201.

Theorem 2.18 ergibt, wenn man eine geignete Retraktion einer V(F)-Umgebung auf V(F) hat, auch einen Interpolationssatz.

Theorem 2.20: p habe (ML) und q sei eine induktive Gewichtsfunktion auf $\mathbb{C}^N$ mit $q = o(p)$. Für das nach 1.1.2) zu p gehörende r gelte $r = O(q)$. Sei weiter $F \in (A_q\setminus\{0\})^M$ $[\subset (A_p^\circ)^M]$ und V(F) reindimensional, $\dim_{\mathbb{C}}(V(F)) = N-R$.

Für I,J strikt aufsteigende R-elementige Teilfolgen von 1,...,M respektive 1,...,N sei

$$\Delta_{I,J} := \det(\partial_j F_i)_{i\in I, j\in J}$$

und

$$D_R(F) := \sum |\Delta_{I,J}|^2,$$

wo die Summe über alle I,J gebildet wird.

Wenn für alle $z\in V(F)$ gilt

$$-\log(D_R(F)) = O(q(z)),$$

dann gibt es für jedes $\tilde{f} \in H(V(F))$, das erfüllt

$$\forall\ \varepsilon>0 \quad \sup_{z\in V(F)} |\tilde{f}(z)|e^{-\varepsilon p(z)} < \infty$$

ein $f \in A_p^\circ$ mit $f|_{V(F)} = \tilde{f}$.

Bemerkung 2.21: $r=O(q)$ ist keine Einschränkung, wenn entweder p 1.1.2*) erfüllt oder r so gewählt werden kann, daß r+q eine induktive Gewichtsfunktion wird. Falls p 1.1.2'') erfüllt und radial ist, zeigt Lemma 3.1, wie man zu $F \in (A_p^\circ)^M$ eine radiale induktive Gewichtsfunktion q mit $q = o(p)$ und $F \in (A_q)^M$ konstruieren kann.

Offenbar ist V(F) eine Mannigfaltigkeit, wenn für alle $z\in V(F)$ $-\log(D_R(F(z))) < \infty$.

Beweis: Sei $r \le \rho q - \log\xi$ auf $\mathbb{C}^N$, $\rho<\infty$, $\xi>0$, dann gibt es nach Jarnicki [1], Lemmata 6.2 und 6.3 $\Theta,\eta>0$ und eine holomorphe Retraktion $\pi: S_{\eta q+\Theta}(F) \longrightarrow V(F)$ so, daß

$$\sup_{x\in S_{\eta q+\Theta}(F)} |x-\pi(x)|e^{\rho q(x)} < \xi.$$

Ist C aus 1.1.2) für p, dann gilt für $\tilde{\tilde{f}} := \tilde{f}\circ\pi$, $\varepsilon>0$ beliebig

$$\sup_{x\in S_{\eta q+\Theta}(F)} |\tilde{\tilde{f}}(x)|e^{-\varepsilon p(z)} \le \sup_{x\in S_{\eta q+\Theta}(F)} |\tilde{f}(\pi(x))|e^{-\varepsilon C^{-1}p(\pi(x))+\varepsilon} < \infty.$$

Also erfüllen $\tilde{\tilde{f}}$ und $\eta q+\Theta$ die Voraussetzungen an $\tilde{f}$ und ρ in 2.18.

Es gibt folglich $f \in A_p^\circ$, $\rho' : \mathbb{C}^N \to [0,\infty[$ oberhalbstetig und $R<\infty$ mit $\rho' < Rp+R$ so daß für alle Holomorphiegebiete G in $S_{\rho'}(F)$, insbesondere auch für $S_{Rp+R}(F)$, $a_i \in H(G)$ $(i=1,\dots,M)$ existieren mit

$$\sum_{i=1}^{M} a_i F_i|_G = f|_G - \widetilde{\widetilde{f}}|_G .$$

Nun enthält $S_{Rp+R}(F)$ $V(F)$, und also gilt $f|_{V(F)} = \widetilde{\widetilde{f}}|_{V(F)} = \widetilde{f}$.

Für dieses Theorem für A_p vgl. Berenstein-Taylor [3], Th.1, p.4 und Jarnicki [1], Th. 5.7, p.49. Falls N=1, p radial und $p(2z) = O(p(z))$, folgt aus Berenstein-Taylor [1], Ex.12 und Th.4, p.124, daß die Bedingung des Theorems nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist, falls $V(\partial F) \cap V(F) = \emptyset$.

Jetzt kommen wir zu einer Darstellung von Quotientenräumen von A_p° nach bestimmten abgeschlossenen Idealen als Potenzreihenräume endlichen Typs.

Def. 2.22: F heißt [schwach] projektiv langsam fallend bez. p, wenn es eine oberhalbstetige Funktion $\rho : \mathbb{C}^N \to [0,\infty[$ gibt mit $\rho = o(p)$ so, daß alle Zusammenhangskomponenten S von $S_\rho(F)$ [die $V(F)$ treffen] beschränkt sind und ein $D<\infty$ existiert, das für alle diese S [die $V(F)$ treffen] erfüllt:

$$\forall\, z,\xi \in S : p(\xi) < Dp(z)+D .$$

Dies bedeutet in jedem Fall, daß $M \geq N$ und $V(F)$ diskret ist.

Im Folgenden bezeichne für $a \in \mathbb{C}^N$, U eine offene a-Umgebung und $f \in H(U)$ $[f]_a$ den Keim von f in a und $I(F)_a$ das von $[F_1]_a,\dots,[F_M]_a$ in $\mathcal{O}_a$ erzeugte Ideal.

Def. 2.23: Es sei $I(F) := I(F_1,\dots,F_M)$ das von $F_1,\dots,F_M$ in A_p° algebraisch erzeugte Ideal.

Weiter sei

$$I_{loc}(F) := I_{loc}(F_1,\dots,F_M) := \{\, f \in A_p^\circ \mid \forall a \in \mathbb{C}^N : [f]_a \in I(F)_a \,\}$$

das von F in A_p° erzeugte lokalisierte Ideal.

Bem. 2.24: 1) $I(F) \subset \overline{I(F)} \subset I_{loc}(F)$.

2) $I_{loc}(F)$ ist abgeschlossen in A_p°.

3) Für die kanonische Quotientenabbildung

$$\kappa\colon A_p^\circ \to \prod_{a\in V(F)} {}^{O_a}/_{I(F)_a} \text{ ist } \ker\kappa = I_{loc}(F).$$

Beweis: 3) ist eine Umformulierung der Definition von $I_{loc}(F)$. Mit der Topologie der Konvergenz aller Koeffizienten der Potenzreihe auf O_a ist $I(F)_a$ in O_a abgeschlossen (vgl. z.B. Hörmander [2], Th. 6.3.5). Bezüglich der Produkttopologie der von O_a auf ${}^{O_a}/_{I(F)_a}$ induzierten Topologien ist κ stetig, also 3)=>2). 2)=>1) ist trivial.

Def. 2.25: Sei F schwach projektiv langsam fallend bez. p, ρ wie in 2.22 zu p, S die Menge der V(F) treffenden Komponenten von $S_\rho(F)$ und für $S \in S$, $H^\infty(S) := \{f\in H(S) \mid \|f\|_S := \sup_{z\in S}|f(z)| < \infty\}$ sei

$\kappa_S\colon H^\infty(S) \to \prod_{a\in V(F)\cap S} {}^{O_a}/_{I(F)_a}$ die kanonische Quotientenabbildung.

Für $E_S := {}^{H^\infty(S)}/_{\ker\kappa_S}$ mit der von $\|.\|_S$ induzierten Norm $\|.\|_S$ setzen wir, wenn V(F) endlich ist

$$A_{pg}^\circ(I_{loc}(F)) := \prod_{S\in S}(E_S, \|.\|_S) ;$$

wenn V(F) (und also S) unendlich ist, $\alpha(S) := \inf_{z\in S} p(z)$, $E := (E_S, \|.\|_S)_{S\in S}$

$$A_{pg}^\circ(I_{loc}(F)) := \Lambda_0^\infty(\alpha, E).$$

Theorem 2.26: Hat p (ML) und ist F schwach projektiv langsam fallend bez. p, dann ist $\kappa\colon A_p^\circ \to A_{pg}^\circ(I_{loc}(F))$, $f \mapsto ([f]_a + I(F)_a)_{a\in V(F)}$ surjektiv und stetig mit $\ker\kappa = I_{loc}(F)$, und ${}^{A_p^\circ}/_{I_{loc}(F)}$ ist entweder endlichdimensional oder ein Potenzreihenraum von endlichem Typ.

Beweis: (vgl. Meise [1], Meise-Taylor [1] für die Idee)

κ ist wohldefiniert und stetig, denn für $f \in A_p^\circ$ und $\varepsilon>0$ beliebig ist, falls V(F) unendlich:

$$\sup_{S\in S}\sup_{z\in S} |f(z)|e^{-D\varepsilon\alpha(S)} \le \sup_{S\in S}\sup_{z\in S} |f(z)|e^{-\varepsilon p(z)+\varepsilon D} \le \|f\|_{\varepsilon,p} e^{\varepsilon D}.$$

Falls V(F) endlich ist, ist nichts nachzurechnen.

Zu zeigen bleibt: κ ist surjektiv.

Im Falle, daß $V(F)$ endlich ist, hat jedes Element von $A^\circ_{pg}(I_{loc}(F))$ ein Urbild unter den Polynomen, und die liegen in A°_p.

Sei jetzt $V(F)$ unendlich, $x = (x_S)_{S\in\mathcal{S}} \in A^\circ_{pg}(I_{loc}(F))$. Dann ist wenn $(S(j))_{j\in\mathbf{N}}$ eine Aufzählung der Elemente von $\mathcal{S}$ mit $\alpha(S(j)) \le \alpha(S(j+1))$ $(j\in\mathbf{N})$ ist,

$$\lim_{j\to\infty} \|x_{S(j)}\|_{S(j)} e^{-\varepsilon\alpha(S(j))} = 0 \text{ für jedes } \varepsilon>0.$$

Insbesondere finden wir für alle $k\in\mathbf{N}$ ein $j_k\in\mathbf{N}$ mit

$$\forall\, j\ge j_k : \|x_{S(j)}\|_{S(j)} \le e^{\alpha(S(j))/k}.$$

O.E. $j_k\uparrow\infty$, und wir finden für $j_k \le j < j_{k+1}$ $f_j \in H^\infty(S_j)$ mit

$$\sup_{z\in S(j)} |f_j(z)| < e^{2\alpha(S(j))/k}.$$

Wir definieren schließlich $\tilde f \in H(S_\rho(F))$ durch

$\tilde f(z) := f_j(z)$, wenn $z \in S(j)$,

$\tilde f(z) := 0$ sonst,

und rechnen leicht nach, daß $\sup_{z\in S_\rho(F)} |\tilde f(z)| e^{-\varepsilon p(z)} < \infty$ für alle $\varepsilon>0$.

Also existieren nach 2.18 ein $f \in A^\circ_p$ und $R<\infty$ so, daß es für $G := S_{Rp+R}(F)$ $a_1,\dots,a_M \in H(G)$ gibt mit

$$f|_G - \tilde f|_G = \sum_{i=1}^{M} a_i F_i|_G.$$

Das bedeutet genau, daß $\kappa(f) = x$.

Nach dem Satz der offenen Abbildung für Frécheträume ist also

$$A^\circ_p / I_{loc}(F) \cong A^\circ_{pg}(I_{loc}(F)).$$

Da die $S \in \mathcal{S}$ alle beschränkt sind, ist $V(F)\cap S$ jeweils endlich und E_S endlichdimensional. Ist $V(F)$ endlich, ist $A^\circ_{pg}(I_{loc}(F))$ endlichdimensional; sonst ist $A^\circ_{pg}(I_{loc}(F))$ als Quotientenraum eines nuklearen Raumes nuklear, wir können also 1.17.2.c) anwenden und erhalten, daß $A^\circ_{pg}(I_{loc}(F)) = \Lambda^\infty_0(\alpha,E)$ ein Potenzreihenraum von endlichem Typ ist.

Korollar 2.27: Hat p (ML), A°_p (DN) und ist F schwach projektiv langsam fallend bez. p, so ist $I_{loc}(F)$ in A°_p genau dann komplementiert, wenn es endlichdimensional ist.

Beweis: "=>" Wenn $A^\circ_p / I_{loc}(F)$ isomorph zu einem Unterraum von A°_p ist, muß es (DN) haben. Ein Potenzreihenraum von endlichem Typ

hat nach 1.19.2) $(\bar{\Omega})$, was nach 1.13.6) (DN) ausschließt. Also kann der Quotientenraum nur endlichdimensional sein.

"<=" ist trivial.

Beispiele 2.28: 1) Sind $F_1,\dots,F_M$ Polynome und ist $V(F)$ diskret, dann ist F projektiv langsam fallend bez. jedes p.

2) Sei p eine projektive Gewichtsfunktion mit

$$\sum_{i=1}^{N} |\mathrm{Im} z_i| = o(p(z)).$$

Seien für $z\in\mathbf{C}^N$, $j=1,\dots,M$

$$F_j(z) := \sum_{k=1}^{m_j} a_{j,k} e^{-in_{j,k}z}, \text{ wo } a_{j,k}\in\mathbf{C},\ n_{j,k}\in\mathbf{Z},\ m_j\in\mathbf{N}.$$

Ist dann $V(F)$ diskret, ist F projektiv langsam fallend bez. p.

3) Sei p eine projektive Gewichtsfunktion, die 1.1.2*) erfüllt, sei $F = (F_1,\dots,F_M) \in (A_p^o)^M$, $M \geq N$. Für alle $a = (a_1,\dots,a_M) \in \mathbf{C}^M$ bis auf eine Nullmenge ist dann $F-a = (F_1-a_1,\dots,F_M-a_M)$ projektiv langsam fallend bez. p.

Beweis: 1) ist trivial. Für 2) vgl. Berenstein-Taylor [2], Prop. 4.9; der Beweis dort ist leicht auf unseren Fall zu übertragen. 3) wird analog zu Berenstein-Taylor [2], Th. 6.4 bewiesen: man ersetzt im Beweis auf p.230 nur $C_1\exp(C_2 p(z))$ durch $\exp(r(z))$ für ein oberhalbstetiges r mit $r=o(p)$.

Kontrastierend zu 2.27 sind im induktiven Fall viele von langsam fallenden Funktionen erzeugte Ideale komplementiert. Meise [1] zeigt nämlich:

Ist $F \in (A_p)^M$ schwach langsam fallend (vgl. Def. 3.1 dort) und $V(F)$ unendlich, so ist $A_p/I_{loc}(F)$ isomorph zum starken Dualraum eines Potenzreihenraumes von unendlichem Typ (vgl. Cor. 3.8 dort). Falls der starke Dualraum von $I_{loc}(F)$ (DN) hat, ist also $I_{loc}(F)$ in A_p komplementiert wegen 1.14, angewandt auf die Sequenz

$$0 \to \left[A_p/I_{loc}(F)\right]'_b \to (A_p)'_b \to (I_{loc}(F))'_b \to 0.$$

Mit klassischer Dualitätstheorie und 1.13.3) schließt man also leicht, daß z.B. jedes algebraisch endlich erzeugte $I_{loc}(F)$ in A_p endlich erzeugt ist, wenn $(A_p)'_b$ (DN) hat.

Zum Schluß des Kapitels wollen wir noch ein Theorem beweisen, das zeigt, daß einige algebraisch erzeugte Ideale in A_p° schon lokalisiert sind.

2.29 Für den Rest des Kapitels sei p eine stetige projektive Gewichtsfunktion, die (ML) erfüllt und 1.1.2) mit einem r, welches eine induktive Gewichtsfunktion ist (Dies gilt z.B. auch, wenn p 1.1.2*) erfüllt, man nimmt dann $r(z):=\log(1+|z|^2)$). Weiter sei M=N.

Lemma 2.30: Sei p wie in 2.29, seien $l_1,\dots,l_R$ linear auf $\mathbb{C}^N$. Dann gibt es für jedes $G \in A_p^\circ$ mit $G|_{V(l_1,\dots,l_R)} \equiv 0$ $Q_1,\dots,Q_R \in A_p^\circ$ mit

$$G = \sum_{j=1}^{R} l_j Q_j .$$

Beweis: Durch Induktion über R. Daß $\frac{G}{l_1} \in A_p^\circ$ ist, sieht man leicht mit der Cauchyformel. Wenn wir das Lemma für R-1 schon gezeigt haben, können wir o.E. annehmen , daß die $l_1,\dots,l_R$ linear unabhängig sind. Wir ergänzen sie durch $l_{R+1},\dots,l_N$ zu einem Koordinatensystem von $\mathbb{C}^N$ und erhalten aus der Induktionsvoraussetzung für $L := V(l_1)$ $\tilde{Q}_2,\dots,\tilde{Q}_R \in A_p^\circ|_L$ mit

$$G|_L = \sum_{j=2}^{R} l_j|_L \tilde{Q}_j .$$

Für q:=r und $F:=l_1$ sind die Voraussetzungen von 2.20 offenbar erfüllt, also gibt es $Q_2,\dots,Q_R \in A_p^\circ$ mit $Q_j|_L = \tilde{Q}_j$ (j=2,...,R), so daß

$$H := G - \sum_{j=2}^{R} l_j Q_j \in A_p^\circ \text{ mit } H|_L \equiv 0.$$

Schließlich ist $H = l_1 Q_1$ für $Q_1 \in A_p^\circ$ nachzurechnen wie bei der Induktionsverankerung.

Folgerung 2.31: Sei Φ: $\mathbb{C}^{2N} \to [0,\infty[$, $\Phi(z,w) := p(z)+p(w)$ für p wie in 2.29. Dann gibt es $Q_{i,j} \in A_\Phi^\circ$ (i,j=1,...,N) so daß für alle i=1,...,N und $z,w \in \mathbb{C}^N$

$$(X) \quad F_i(z)-F_i(w) = \sum_{j=1}^{N} Q_{i,j}(z,w)(z_j-w_j) .$$

Beweis: Φ erfüllt wegen 1.11.2) (ML), wir können also 2.30 mit $p := \Phi$ und $G(z,w) := F_i(z)-F_i(w)$ anwenden und sind fertig.

Für 2.30, 2.31 vgl. auch Berenstein-Taylor [2], Th. 2.4 und Cor. 2.5, p.204.

Def. 2.32: Der analytische Polyeder

$P(\eta) := \{z\in\mathbb{C}^N \mid |F_i(z)|<\eta_i \ (i=1,\dots,N)\}$ für $\eta:=(\eta_1,\dots,\eta_N)\in\mathbb{R}^N_+$ heißt nichtausgeartet, wenn für alle $k=1,\dots,N$ und alle $1\le i(1)<\dots<i(k)\le N$ $\partial F_{i(1)}\wedge\dots\wedge\partial F_{i(k)}$ auf

$\{z\in\mathbb{C}^N \mid |F_{i(j)}(z)|=\eta_{i(j)} \ (j=1,\dots,k),\ |F_i(z)|<\eta_i \text{ sonst}\}$

keine Nullstelle hat.

Bemerkung 2.33: Für alle $\eta\in\mathbb{R}^N_+$ bis auf eine Nullmenge ist $P(\eta)$ nicht ausgeartet.

Beweis: Jedes $\eta\in\mathbb{R}^N_+$ so, daß $P(\eta)$ ausgeartet ist, liegt in einer Menge der Form:

$\{\eta\in\mathbb{R}^N_+ \mid \exists x\in\mathbb{C}^k: \eta_{i(j)}=|F_{i(j)}(x)| \ (j=1,\dots,k), d|F_{i(1)}|\wedge\dots\wedge d|F_{i(k)}|(x)=0\}$,

wo $k\in\{1,\dots,N\}$, $1\le i(1)<\dots<i(k)\le N$. Jede dieser Mengen ist nach dem Satz von Sard eine Nullmenge in $\mathbb{R}^N_+$.

Satz 2.34: (Berenstein-Taylor)

Sei $\eta\in\mathbb{R}^N_+$, $P(\eta)$ nicht ausgeartet, Ω eine Komponente von $P(\eta)$, $O := \{z\in\Omega \mid |F_i(z)| < \tfrac{1}{2}\eta_i\}$ und sei f holomorph auf einer $\overline{\Omega}$-Umgebung in $\mathbb{C}^N$. Weiter gelte:

1) $|f|_{\overline{\Omega}} \le E$

2) Es gibt $(Q_{i,j})_{i,j=1,\dots,N}$, die (X) mit F erfüllen so, daß auf $\overline{\Omega}\times O$ gilt $|\det(Q_{i,j})_{i,j}| \le A$.

3) Ist $\Gamma(\eta) := \{z\in\overline{\Omega} \mid |F_i(z)|=\eta_i \ (i=1,\dots,N)\}$ der distinguierte Rand von Ω, so gilt

$$\int_{\Gamma(\eta)} |dz_1\wedge\dots\wedge dz_N| \le L.$$

4) $|F_i|_{\overline{\Omega}} \le A_1$ $(i=1,\dots,N)$ für ein $A_1>1$.

5) Es gibt f_i $(i=1,\dots,N)$ holomorph auf einer $\overline{\Omega}$-Umgebung in $\mathbb{C}^N$ so, daß $f = \sum_{i=1}^N F_i f_i$ auf $\overline{\Omega}$.

Dann gibt es $C_N < \infty$, das nur von N abhängt, und $a_i \in H(\Omega)$ $(i=1,\dots,N)$ so, daß $f = \sum_{i=1}^N F_i a_i$ auf Ω und

$$\forall\, z\in\Omega : |a_i(z)| \le C_N A E L A_1^{N-1} \left(\prod_{j=1}^N \eta_j\right)^{-2} .$$

Beweis: siehe Berenstein-Taylor [2], Prop.1.3, p.195f.

Satz 2.35: (Berenstein-Taylor)
Es sei $D(\eta) := \{(\varepsilon_i)_{i=1,\dots,N} | 0<\varepsilon_i<\eta_i\}$. Für $0<\sigma<1$ sei

$$L \geq C_N E^{2N} \lambda(\Omega) \frac{1}{\sigma} \left\{ \prod_{j=1}^{N} \eta_j \right\}^{-1}$$

und für alle $i,j=1,\dots,N$ und $z \in \overline{\Omega}$ $|F_i(z)|, |\partial_j F_i(z)| < E$.

Dann gilt für alle $\varepsilon \in D(\eta)$ mit Ausnahme einer Menge vom Lebesguemaß $\sigma\lambda(D(\eta))$, daß $\int_{\Gamma(\varepsilon)} |dz_1 \wedge \dots \wedge dz_N| \leq L$ und, daß $P(\varepsilon)$ nicht ausgeartet ist.

Beweis: siehe Berenstein-Taylor [2], Cor. 1.6, p.199.

Lemma 2.36: Sei p wie in 2.29 und sei F projektiv langsam fallend bez. p. Dann gibt es für jedes ρ° so, daß Def. 2.22 mit p,F,ρ° erfüllt ist ρ' und $\rho : \mathbb{C}^N \to [0,\infty[$ oberhalbstetig mit $\rho' > \rho > \rho^\circ$ und $\rho', \rho = o(p)$ sowie ein Holomorphiegebiet G mit $S_{\rho'}(F) \subset G \subset \overline{G} \subset S_\rho(F)$, für die gilt:

1) Auf $S_{\rho'}(F)$ ist $-\log(d(z, S_\rho(F)^c)) = o(p(z))$.

2) Es gibt $\rho^{**} : \mathbb{C}^N \to [0,\infty[$, $\rho^{**} = o(p)$ so, daß für jede Komponente S von $S_\rho(F)$

$$G(S) := G \cap S = \{z \in S \mid |F_i(z)| < K_i(S) \ (i=1,\dots,N)\}$$

ein nichtausgearteter analytischer Polyeder ist mit $-\rho^{**}(y) < \log K_i(S) < \infty$ für alle $i=1,\dots,N$ und alle $y \in S$.

3) Es gibt $\rho^* : \mathbb{C}^N \to [0,\infty[$, $\rho^* = o(p)$ so, daß für alle Komponenten S von $S_\rho(F)$ und alle $y \in S$ gilt

$$\int_{\Gamma(S)} |dz_1 \wedge \dots \wedge dz_N| < e^{\rho^*(y)},$$

wenn $\Gamma(S)$ der distinguierte Rand von G(S) ist.

4) Für $j=1,\dots,R$ ist $|G_j| \leq e^\rho$ auf $\mathbb{C}^N$.

Beweis: Wähle ein oberhalbstetiges $\rho : \mathbb{C}^N \to [0,\infty[$ so, daß $\rho > \rho^\circ, \log|F_i|, \log|\partial_j F_i|, \log|G_k|, \log|.|$ für alle $i,j=1,\dots,N$, $k=1,\dots,R$ und $\rho = o(p)$.

Jetzt wähle induktiv $1<D_n<D_n+1<D_{n+1}<\infty$ $(n \in \mathbb{N})$ so, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ $\rho(z) < \frac{1}{n} p(z)$, wenn $|z| \geq D_n$ und (wenn D die Konstante aus 2.22 zu p,F,ρ° ist) $p(y) > Dp(z)+D$ für alle $y,z \in \mathbb{C}^N$ mit $|y| = D_{n+1}$, $|z| = D_n$. Insbesondere trifft also jede Komponente von $S_{\rho^\circ}(F)$ (und also auch von $S_\rho(F)$) höchstens eine Menge $\{z \mid |z|=D_n\}$.

Sei $\mathcal{S}$ die Menge der Komponenten von $S_\rho(F)$, die $\{z \mid |z|\le D_2\}$ nicht treffen, dann definieren wir für $S\in\mathcal{S}$, $y(S)\in S$ beliebig

$$\varepsilon(S) := \inf\{\tfrac{2}{m-1} \mid m\in\mathbf{N},\ S\cap\{z\mid|z|<D_m\}=\emptyset\},$$

$$\eta'(S) := e^{-2D\varepsilon(S)(p(y(S))+1)},$$

$$\eta(S) := \tfrac{1}{\sqrt{N}}\eta'(S),$$

$$G'(S) := \{z\in S \mid |F_i(z)|<\eta(S)\ (i=1,\dots,N)\}.$$

Weil für alle $z\in S$ $\eta'(S) \le e^{-2\varepsilon(S)p(z)} < e^{-\varepsilon(S)p(z)} \le e^{-\rho(z)}$, ist $G'(S)$ relativ kompakt in S. Weil

$$\lambda(\{(k_1,\dots,k_N) \mid \tfrac12\eta(S) < k_j < \eta(S)\ (j=1,\dots,N)\}) = (\tfrac12\eta(S))^N,$$

folgt mit 2.35, daß es $K_1(S),\dots,K_N(S)$ gibt mit $\frac12\eta(S)<K_j(S)<\eta(S)$ $(j=1,\dots,N)$ so, daß für

$$G(S) := \{z\in S \mid |F_j(z)| < K_j(S)\ (j=1,\dots,N)\} \text{ und}$$

$$\Gamma(S) := \{z\in S \mid |F_j(z)| = K_j(S)\ (j=1,\dots,N)\}$$

$G(S)$ nicht ausgeartet ist und

$$\int_{\Gamma(S)} |dz_1\wedge\dots\wedge dz_N| \le L(S) := C_N(\eta'(S))^{-2N}\lambda(G'(S))(\tfrac12\eta(S))^{-N}.$$

Weil für $z\in S$ $|z| < e^{\rho(z)} \le e^{\varepsilon(S)p(z)} \le \eta'(S)^{-1}$, gilt $\lambda(G'(S)) < \lambda(S) < D_N\eta'(S)^{-2N}$, wo D_N nur von N abhängt. Also ist für alle $y\in S$

$$L(S) < E_N\eta'(S)^{-5N} = E_N e^{10ND\varepsilon(S)(p(y(S))+1)} \le E_N e^{10ND\varepsilon(S)(Dp(y)+D+1)},$$

wo wieder E_N nur von N abhängt. 2) und 3) sind also für alle $S\in\mathcal{S}$ gezeigt, während 4) schon mit den Voraussetzungen an ρ erfüllt wurde.

Nach 2.17 gibt es ein oberhalbstetiges $\rho'': \mathbf{C}^N \to [0,\infty[$ so, daß $\rho''>\rho$, $\rho''=o(p)$ und 1) mit ρ'' anstelle von ρ' erfüllt ist. Setzt man also $\rho'(z) := \max(\rho''(z),s(z))$, wo s die obere Regularisierte ist von einem $\tilde{s}$ mit

$$\tilde{s}(z) := \tfrac{2}{m-1}D(Dp(z)+D+1) \text{ für } D_m<|z|\le D_{m+1} \text{ und } m\ge 2,$$

$\tilde{s}$ stetig und größer als 1 sonst,

dann gilt für alle $S\in\mathcal{S}$, $z\in S$, daß

$$K_i(S) > \tfrac12\eta(S) \ge \tfrac{1}{2\sqrt{N}}e^{-D\varepsilon(S)(Dp(z)+D+1)} \ge e^{-\rho'(z)},$$

und also $(S_{\rho'}(F)\cap \bigcup_{S\in\mathcal{S}} S) \subset \bigcup_{S\in\mathcal{S}} G(S)$.

Für die endlich vielen noch verbleibenden Komponenten S von $S_\rho(F)$, die nicht in S liegen, sind dann nur noch ρ' auf $\{z \mid |z|<D_3\}$ stetig zu vergrößern und die $K_i(S)$ so zu wählen, daß $G(S)$ nicht ausgeartet ist und $G(S)$ in $S_\rho(F)$ liegt.

$G := \bigcup G(S)$, wo die Vereinigung über alle Komponenten von $S_\rho(F)$ geht, ist dann als disjunkte Vereinigung von Holomorphiegebieten wieder ein Holomorphiegebiet, und ρ,ρ',G erfüllen alles, was im Lemma verlangt wird.

Theorem 2.37: Sei p wie in 2.29, sei $F=(F_1,\ldots,F_N)$ projektiv langsam fallend bez. p. Dann ist in A_p° $I_{loc}(F) = I(F)$.

Beweis: Seien $Q_{i,j}$ wie in 2.31 gewählt, sei $f \in I_{loc}(F)$ und seien ρ°,ρ,ρ',G wie in 2.36 zu

$$\{G_1,\ldots,G_R\} := \{Q_{i,j}, f \ (i,j=1,\ldots,N)\}$$

gefunden. Wegen Cartans Theorem B (vgl. z.B. Hörmander [2], Th.7.4.3) gibt es $f_1,\ldots,f_N \in H(\mathbb{C}^N)$ mit $f = \sum_{i=1}^N f_i F_i$.

Mit 2.34, angewendet auf jedes einzelne $G(S)$, und den Abschätzungen von 2.36 erhalten wir $a_1,\ldots,a_N \in H(G)$ mit

$$\sum_{i=1}^N a_i F_i|_G = f|_G$$

und $$\sup_{z\in G} |a_i(z)|e^{-\varepsilon p(z)} < \infty \text{ für alle } \varepsilon>0,\ i=1,\ldots,N.$$

Mit 2.17 finden wir ein oberhalbstetiges $\rho'': \mathbb{C}^N \to [0,\infty[$ mit $\rho''=o(p)$, $\rho''>\rho'$ und für $z \in S_{\rho'',(F)}$

$$-\log(d(z,S_{\rho',(F)}{}^c)) = o(p(z)).$$

Es gibt also $\gamma \in C^\infty(\mathbb{C}^N)$, $0 \le \gamma \le 1$ mit

$$\gamma|_{S_{\rho'',(F)}} \equiv 1,\ \gamma|_{S_{\rho',(F)}{}^c} \equiv 0 \text{ und}$$

$$\sup_{z\in\mathbb{C}^N} |(\bar\partial\gamma)_1(z)|e^{-\varepsilon p(z)} < \infty$$

für alle Koeffizienten $(\bar\partial\gamma)_1$ von $\bar\partial\gamma$ und alle $\varepsilon>0$.

Sei jetzt die Abbildung $\tilde a: \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ definiert durch $\tilde a := (\tilde a_1,\ldots,\tilde a_N)$ mit

$$\tilde a_i := \gamma a_i + f(1-\gamma)F_i|F|^{-2} \ (i=1,\ldots,N).$$

Dann gilt $\tilde{a} \in \bigcap_{\varepsilon>0} L_{0,1}(0,\varepsilon)$, $P_F\tilde{a} = f$ und also $0 = \bar{\partial}P_F\tilde{a} = P_F\bar{\partial}a$.

Weiter ist direkt nachzurechnen:

$$\bar{\partial}\tilde{a}_i = a_i\bar{\partial}\gamma + f(1-\gamma)|F|^{-4}\sum_{j=1}^{N} F_j\overline{(F_j\partial F_i - F_i\partial F_j)} - f\bar{\partial}\gamma\overline{F_i}|F|^{-2} .$$

Da $1-\gamma$ und $\bar{\partial}\gamma$ auf $S_{\rho'',(F)}$ jeweils 0 sind und für $z\in S_{\rho'',(F)}{}^c$ $|F(z)|^{-1} \le e^{\rho''(z)}$, ist

$$\bar{\partial}\tilde{a} \in A := \bigcap_{\substack{\varepsilon>0\\ k\in\mathbf{N}}} L_{1,1}(k,\varepsilon).$$

Wir haben das Theorem bewiesen, wenn wir $b_i \in C^\infty(\mathbf{C}^N)$ $(i=1,\dots,N)$ gefunden haben mit $\tilde{a}_i - b_i \in A_p^o$ $(i=1,\dots,N)$ und

$$\sum_{i=1}^{N} b_iF_i = P_Fb = 0.$$

Dazu zeigen wir zuerst den

Hilfssatz: Seien $Z := \{g=(g_1,\dots,g_N)\in(C^\infty(\mathbf{C}^N))^N \mid P_F\bar{\partial}g=0,\ \bar{\partial}g\in A\}$ und $Y(\varepsilon) := P_F(A_{0,2}(0,\varepsilon))$.
Dann ist für $\varepsilon'>\varepsilon>0$, $k\ge N$ exakt:

$$0 \longrightarrow Y(\varepsilon') \longrightarrow Y(\varepsilon')+\{w\in L_{0,1}(k,\varepsilon) \mid w\in Z,\ P_Fw=0\} \xrightarrow{\Phi} {}^{Z}\!/_{Z\cap H(\mathbf{C}^N)^N} \longrightarrow 0,$$

wo Φ die Einschränkung der kanonischen Quotientenabbildung von Z ist.

Beweis: I) Φ ist surjektiv.
Sei $g \in Z$, also $P_F\bar{\partial}g=0$, $\bar{\partial}\bar{\partial}g=0$, dann gibt es nach 2.14 für $k\ge1$, $\varepsilon>0$ beliebig ein $h \in L_{1,2}(k-1,\tfrac{1}{2}\varepsilon)$ mit $\bar{\partial}h=0$, $P_Fh=\bar{\partial}g$, und nach 2.12 weiter $c \in L_{0,2}(k-1,\varepsilon)$ mit $\bar{\partial}c=h$, $\bar{\partial}P_Fc=P_F\bar{\partial}c=P_Fh=\bar{\partial}g$. $w:=P_Fc$ erfüllt $w \in L_{0,1}(k,\varepsilon)$ und $\bar{\partial}(w-g)=0$, $P_Fw=P_FP_Fc=0$, ist also das gesuchte Urbild unter Φ.

II) $\ker\Phi = Y(\varepsilon')$.
Wegen 2.14 liegt für $k\ge N$ $\ker\Phi$ in $P_F(A_{0,2}(k-N,\varepsilon''))$ für jedes $\varepsilon''>\varepsilon$, und dies liegt wieder in $P_F(A_{0,2}(0,\varepsilon'))$ für jedes $\varepsilon'>\varepsilon''$.
Damit ist der Hilfssatz gezeigt.

$A_{0,2}(0,\varepsilon')$ ist ein Hilbertraum, und wir können $Y(\varepsilon')$ mit der feinsten lokalkonvexen Topologie versehen, so daß
P_F: $A_{0,2}(0,\varepsilon') \longrightarrow Y(\varepsilon')$ stetig ist. Dann wird auch $Y(\varepsilon')$ ein

Hilbertraum, und es ist leicht nachzurechnen, daß $id:Y(\varepsilon')\to Y(\varepsilon'')$ für $\varepsilon''>\varepsilon'$ mit diesen Topologien stetig ist.

Da p (ML) hat, gibt es eine Folge $(D(n))_{n\in\mathbf{N}}$, $D(n)>0$, $D(n)\downarrow 0$ $(n\in\mathbf{N})$ so, daß $A_{0,2}(0,D(n+2))$ in $A_{0,2}(0,D(n+1))$ mit der Topologie von $A_{0,2}(0,D(n))$ dicht liegt $(n\in\mathbf{N})$. Dann ist auch $Y(D(n+2))$ in $Y(D(n+1))$ bez. der Topologie von $Y(D(n))$ für alle $n\in\mathbf{N}$ dicht und also nach 2.15 surjektiv:

$$\Phi:\ \bigcap_{\varepsilon>0}\left(Y(2\varepsilon)+\{g\in L_{0,1}(k,\varepsilon)\mid P_f g=0,\ g\in Z\}\right)\ \cap\ \bigcap_{\varepsilon>0}\{g\in L_{0,1}(0,\varepsilon)\mid P_F g=0\}\ \longrightarrow\ {}^{Z}\!/_{Z\cap H(\mathbf{C}^N)N}.$$

Insbesondere gibt es zu $\tilde{a}\in Z$ ein $b\in\bigcap_{\varepsilon>0}L_{0,1}(0,\varepsilon)$ mit $P_F b=0$ und $\bar{\partial}(\tilde{a}-b)=0$, womit das Theorem bewiesen ist.

Korollar 2.38: Hat unter den Voraussetzungen von Theorem 2.37 A_p° (DN), dann ist I(F) genau dann komplementiert in A_p°, wenn V(F) endlich ist.

Beweis: Kombiniere 2.27 und 2.37.

Im induktiven Fall benutzt Meise [1], daß für $F=(F_1,\dots,F_N)\in(A_p)^N$ langsam fallend (vgl. Def. 3.1 dort) gilt: $I(F)=I_{loc}(F)$, um zu zeigen, daß I(F) in A_p komplementiert ist, wenn $(A_p)'_b$ (DN) hat. Dies ist z.B. erfüllt, wenn p 1.1.2''') und 1.1.4) erfüllt (vgl. Cor. 2.9 dort).

KAPITEL 3

In diesem Kapitel studieren wir Hauptideale in $A_p^\circ(\mathbb{C}^2)$ für 'schöne' p. Bevor wir uns mit deren Komplementiertheit beschäftigen, brauchen wir ein Lemma, um damit ihre Lokalisiertheit zu zeigen. Dies Lemma ist nützlich, um Argumente mit dem Mittag-Leffler-Lemma in einigen Fällen zu umgehen. Deshalb geben wir es in einer sehr allgemeinen Form an, die wir auch später noch benützen können.

Lemma 3.1: Sei p eine komponentenweise radiale projektive Gewichtsfunktion auf $\mathbb{C}^N$, die 1.1.2'') erfüllt, und seien $G_i : \mathbb{C}^N \to [-\infty,\infty[$ plurisubharmonisch, $G_i = o(p)$ $(i=1,\ldots,R)$, dann gibt es eine positive, komponentenweise radiale plurisubharmonische Funktion q auf $\mathbb{C}^N$, die 1.1.2'') erfüllt, mit $q = o(p)$ und $G_i = O(q)$ $(i=1,\ldots,R)$.

Beweis: (vgl. auch Meise-Taylor [1], Lemma 2.3 für die Idee)

Wir setzen

$$q_1(z) := \max\{G_i(y_1,\ldots,y_N), 1 \mid i=1,\ldots,R,\ |y_j|=|z_j| \ (j=1,\ldots,R)\}$$

und für $\alpha>1$, das wir später festsetzen,

$$q(z) := \int_0^\infty q_1(\xi z)(1+\xi)^{-\alpha}d\xi.$$

q_1 und q sind plurisubharmonisch und komponentenweise radial, und weiter ist

$$q(2z) = \int_0^\infty q_1(2\xi z)(1+\xi)^{-\alpha}d\xi = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty q_1(\xi z)(1+\tfrac{1}{2}\xi)^{-\alpha}d\xi \le 2^{\alpha-1}q(z),$$

also erfüllt q 1.1.2'').

Wenn weiter $C_1, R < \infty$ so bestimmt sind, daß

$$\forall\, z\in\mathbb{C}^N,\ |z|>R : p(2z) < C_1 p(z)$$

und α so groß ist, daß $C_1 < 2^{\alpha-1}$, dann gilt für $|z|>R$:

$$\int_1^\infty p(\xi z)(1+\xi)^{-\alpha}d\xi \le \sum_{n=1}^\infty \int_{2^{n-1}}^{2^n} p(2^n z)\xi^{-\alpha}d\xi \le p(z)(\alpha-1)C_1\sum_{n=1}^\infty (C_1 2^{1-\alpha})^{n-1}.$$

Da $q_1 = o(p)$, ist also auch

$$q(z) = o\Big(\int_0^\infty p(\xi z)(1+\xi)^{-\alpha}d\xi\Big) = o(p(z)).$$

Es gilt $G_i \leq 3^{\alpha} q$ $(i=1,\ldots,R)$, weil

$$3^{-\alpha} q_1(z) \leq \int_1^2 q_1(\xi z)(1+\xi)^{-\alpha} d\xi \leq q(z)$$

und $G_i \leq q_1$ nach Definition von q_1.

Zusammen mit dem Minimum-Modulus-Prinzip (vgl. z.B. Levin [1], Lehrsatz 11) ergibt dies:

Satz 3.2: Sei p eine komponentenweise radiale projektive Gewichtsfunktion auf $\mathbb{C}^N$, die 1.1.2'') erfüllt. Dann ist für alle $G \in A_p^{\circ}$

$$I(G) = I_{loc}(G).$$

Beweis: O. E. ist G ungleich 0. Es ist zu zeigen, daß für $F,G \in A_p^{\circ}$ mit $F/G \in H(\mathbb{C}^N)$ gilt $F/G \in A_p^{\circ}$.

Sei q wie in 3.1 für

$$\{G_1,\ldots,G_R\} := \{\log|F|,\log|G|,\log(1+|.|^2)\}$$

gegeben, dann ist für jeden C-eindimensionalen Unterraum U von $\mathbb{C}^N$ $q|_U$ eine radiale, induktive Gewichtsfunktion. Aus dem Minimum-Modulus-Prinzip (vgl. Berenstein-Taylor [1], Prop.4, p.131 für die Anwendung) folgt:

Wenn $|G(z)| \leq D(1)e^{D(2)q(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}^N$, wenn weiter für $|z|>R$ $q(4ez) \leq D(3)q(z)$ und $D(0):=2+\log(48e)$, dann gilt für $\varepsilon := D(1)^{-D(0)}$, $D(4):=D(0)D(2)D(3)$, daß für alle C-eindimensionalen Unterräume U von $\mathbb{C}^N$

$$S_U := U \cap S_{-\log\varepsilon+D(4)q}(G)$$

nur beschränkte Zusammenhangskomponenten S besitzt und für z,ξ aus einem beliebigen solchen S mit $|z|,|\xi|>R$

$$(@)\quad q(\xi) \leq D(3)q(z).$$

Da $F \in A_q$, gibt es also $A,B < \infty$ so, daß für alle U

$$\left|\frac{F}{G}\right| \leq Ae^{Bq} \text{ auf } U\backslash S_U.$$

Nach Voraussetzung ist $F/G \in H(\mathbb{C}^N)$, also ergibt (@) zusammen mit dem Randmaximumprinzip, angewandt auf jede Komponente von jedem S_U, daß es $A(1),B(1) < \infty$ gibt so, daß

$$\left|\frac{F}{G}\right| \leq A(1)e^{B(1)q} \text{ auf ganz } \mathbb{C}^N,$$

also wegen $q = o(p)$ insbesondere $F/G \in A_p^{\circ}$.

(Für den Beweis eines Spezialfalles hiervon vgl. Martineau [1], Th.2, p.134)

3.3: Sei für den Rest des Kapitels $p: \mathbb{C}^2 \to [0,\infty[$ eine stetige, projektive Gewichtsfunktion, die 1.1.2'''), 1.1.4) erfüllt und außerdem 1.1.2) mit einem r so, daß $r(z,w)=r_1(|z|)+r_2(|w|)$, wo r_1, r_2 oberhalbstetig und $t \to r_i(e^t)$ (i=1,2) konvex und wachsend sind. Für $z\in\mathbb{C}$ sei

$$p|(z) := p(z,0)$$

und für $f \in A^o_{p|}$ fest

$$q(z) := p(z,f(z)).$$

Beispiele 3.4: Seien stetige $\varphi_j: [0,\infty[\to [0,\infty[$ gegeben mit

$\exists\, C_j<\infty\ \forall\ t\geq 0 : \varphi_j(2t) < C_j\varphi_j(t)+C_j,\ 2\varphi_j(t) < \varphi_j(C_jt)+C_j,$

$s \mapsto \varphi_j(e^s)$ konvex und strikt wachsend,

und seien $r_j > 0$ für $j=1,\dots,2L+2$.

Dann ist

$$p:(z,w)\mapsto \varphi_1(|z|^{r_1})+\varphi_2(|w|^{r_2})+\sum_{k=1}^{L}\varphi_{2k+1}(|z|^{r_{2k+1}})\varphi_{2k+2}(|w|^{r_{2k+2}})$$

eine Gewichtsfunktion, die 3.3 erfüllt.

Erlaubte φ_j sind z.B.

$$t \mapsto t^{\rho(1)}\log^{\rho(2)}(1+t^2)\log^{\rho(3)}\log(3+t^2)$$

mit $\rho(1)>0$, $\rho(2),\rho(3)\geq 0$.

Für andere erlaubte φ_j vgl. Komatsu [1], §3 und Meise [1], 2.6, p.68.

Bemerkung 3.5: p ist plurisubharmonisch, also gilt wegen des Randmaximumprinzips für alle $z,w\in\mathbb{C}$ $p(|z|,|w|) \geq p(|z|,0)$, und insbesondere $q(z) \geq p|(z)$.

Lemma 3.6: q ist eine stetige projektive Gewichtsfunktion so, daß das r zu q aus 1.1.2) als induktive Gewichtsfunktion gewählt werden kann, und hat (ML).

Beweis: q erfüllt offenbar 1.1.1) und 1.1.3). Mit 3.1 findet man radiale induktive Gewichtsfunktionen $\varphi_1, \varphi_2: \mathbb{C} \to [0,\infty[$ und $D<\infty$ mit

$$\forall\ z\in\mathbb{C}, i=1,2 : \varphi_i(2z) \leq D\varphi_i(z)+D$$

so, daß $\varphi_1 = o(p|)$, $\log|f|, \log|\partial f|, r_1 < \varphi_1$

und $\varphi_2(z) = o(p(0,z))$, $r_2 < \varphi_2$.

Für $s(z) := -D-\sqrt{2}-D\varphi_1(z)-\varphi_2(f(z))$ und $|z-\xi| \leq e^{-s(z)}$, $|z|\geq 1$

ergibt der Mittelwertsatz, daß

$$|(z,f(z))-(\xi,f(\xi))| \leq e^{-r(z,f(z))},$$

folglich mit C zu p aus 1.1.2): $q(\xi) \leq Cq(z)+C$. Weil $s(z) = o(p(z,f(z)))$, erfüllt q also 1.1.2). s ist eine induktive Gewichtsfunktion, denn 1.1.2) für s folgt aus dem Mittelwertsatz und die anderen Bedingungen sind leicht zu überprüfen.

Um zu zeigen, daß q (ML) hat, genügt es wegen 1.6.2), zu beweisen:

(□) Für K(p) zu p aus 1.6.2) und C zu p aus 1.1.2) liegen die Polynome in z und f(z) für alle $\varepsilon>0$ dicht in $B_{\varepsilon,q}$ bez. der Norm $\|.\|_{2CK(p)\varepsilon,q}$.

Dazu zeigen wir zuerst den

Hilfssatz: Für $\varepsilon>0$, $F(z,w) := f(z)-w \in A_p^o$ läßt sich jede Funktion $g \in H(V(F))$ mit $\sup_{z\in V(F)} |g(z)|e^{-\varepsilon p(z)} < \infty$ zu einer Funktion $G \in W_{2C\varepsilon,p}$ fortsetzen.

Beweis: Sei $\tilde{p}(z,w) := \varphi_1(z)+\varphi_2(w)$, dann ist $\tilde{p}$ eine induktive Gewichtsfunktion, $\tilde{p}>r$, und nach Jarnicki [1], Lemmata 6.2 und 6.3 gibt es $\Theta,\gamma<\infty$ so, daß für $\tilde{s} := \gamma\tilde{p}+\Theta$ eine holomorphe Retraktion $\pi: S_{\tilde{s}}(F) \longrightarrow V(F)$ existiert mit

$$\sup_{z\in S_{\tilde{s}}(F)} |z-\pi(z)|e^{-\varepsilon C\tilde{p}(z)} < 1.$$

Also gilt für $z\in S_{\tilde{s}}(F)$, $\tilde{g}(z):=g(\pi(z))$, daß

$$\sup_{z\in S_{\tilde{s}}(F)} |\tilde{g}(z)|e^{-\varepsilon Cp(z)} \leq \sup_{z\in S_{\tilde{s}}(F)} |g(\pi(z))|e^{-\varepsilon p(\pi(z))+\varepsilon C} < \infty.$$

Aus 2.17 folgt wie im Beweis von 2.18 die Existenz eines oberhalbstetigen $\rho' : \mathbf{C}^2 \longrightarrow [0,\infty[$ mit $\rho' > \tilde{s}$, $\rho' = o(p)$ und eines $\gamma \in C^\infty(\mathbf{C}^2)$, das erfüllt:

$$0 \leq \gamma \leq 1,\ \gamma|_{S_{\rho'}(F)} \equiv 1,\ \gamma|_{S_{\tilde{s}}(F)^c} \equiv 0,$$

$$\forall\ \delta>0,\ l=1,\ldots,N : \sup_{z\in\mathbf{C}^2} |(\bar\partial\gamma)_l(z)|e^{-\delta p(z)} < \infty.$$

Also ist $\bar\partial(\tilde g\gamma) = \tilde g\bar\partial\gamma \in L_{1,0}(k,\varepsilon')$ für jedes $k\in\mathbf{N}$, $\varepsilon'>C\varepsilon$. Zu k=2 gibt es wegen 2.14 für $\varepsilon'' := \frac{3}{2}\varepsilon C$ ein $h \in L_{1,1}(k-2,\varepsilon'')$ mit $\bar\partial h = 0$ und $P_F h = \bar\partial(\tilde g\gamma)$, also wegen 2.12 für $\varepsilon''' := 2C\varepsilon$ ein $u \in L_{0,1}(0,\varepsilon''')$ mit $\bar\partial u = h$.

Also erhalten wir $\bar\partial(\tilde g_\gamma - P_F u) = \bar\partial(\tilde g_\gamma) - P_F h = 0$. $G := \tilde g_\gamma - P_F u$ erfüllt weiter $\|G\|_{2C\varepsilon,p} < \infty$ und $G|_{V(F)} = \tilde g_\gamma|_{V(F)} = g$.

Wegen 1.9 läßt sich G in der $\|.\|_{2C\varepsilon,p}$-Norm durch Polynome approximieren, wegen 1.6.2) also erst recht in der $\|.\|_{2CK(p)\varepsilon,p}$-Norm. Die Einschränkung dieser Abschätzung auf V(F) ergibt dann (□).

3.7: Ab jetzt erfülle p zusätzlich zu 3.3 noch 1.1.2) mit $r(z) = F\log(1+|z|^2)+F$ für ein $F<\infty$.
Dies gilt z.B. immer für die p von 3.4.

Die Punkte 3.9 bis 3.14 dienen dazu, zu beweisen:

Theorem 3.8: Sei p wie in 3.7 und $f \in A^\circ_{p|}$, f kein Polynom. Dann gibt es ein $g \in A^\circ_{p|}$ mit unendlich vielen Nullstellen, alle von Vielfachheit 1, das projektiv langsam fallend bez. q ist so, daß das von g in A°_q erzeugte Ideal I(g) abgeschlossen, lokalisiert und komplementiert ist.
Insbesondere enthält A°_q einen abgeschlossenen Unterraum, der isomorph ist zu einem Potenzreihenraum von endlichem Typ, hat also nicht (DN).

Dieses Theorem ist das wesentliche Hilfsmittel zum Beweis der Theoreme 3.21, 3.22 und 3.23.

Bemerkung 3.9: Eine ganze Funktion f auf $\mathbf{C}$ ist genau dann ein Polynom, wenn es eine Folge $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $r_n\uparrow\infty$ gibt so, daß für $M(r) := \sup_{|z|=r}|f(z)|$ gilt $\log_+M(r_n) = O(\log r_n)$.

Beweis: "=>" ist klar.
"<=": Wenn es $A,B<\infty$ gibt so, daß $\forall\, n\in\mathbf{N}$: $\log_+M(r_n) \le A\log r_n+B$, dann folgt $\log_+M(r) \le A\log r+B$ für alle $r\ge r_1$, denn $z \mapsto A\log|z|+B$ ist harmonisch auf $\mathbf{C}\setminus\{0\}$, $\log_+M(|z|)$ subharmonisch auf $\mathbf{C}$.

Bemerkung 3.10: Für $a\ge0$, $b\ge1$ und $1>s>0$ ist
$$a^s > b\log_+a - bs^{-1}(\log b - \log s).$$

Beweis: $a \mapsto b^{-1}a^s - \log a$ nimmt sein Minimum an in $(bs^{-1})^{\frac{1}{s}}$ und hat dort den Wert $s^{-1} - s^{-1}(\log b - \log s)$. Also gilt

$$a^s > b\log a - bs^{-1}(\log b - \log s).$$

Da a^s, $\log b \geq 0$ und $\log s < 0$, folgt die Behauptung.

Lemma 3.11: Seien $K := \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{4} < |z| < 1\}$, $C > 1$ und h eine bez. des Bogenmaßes integrierbare reellwertige Funktion auf δK. Wenn für $\Gamma := \{e^{i\varphi} \mid \pi/C \leq \varphi \leq \pi/C\}$ gilt

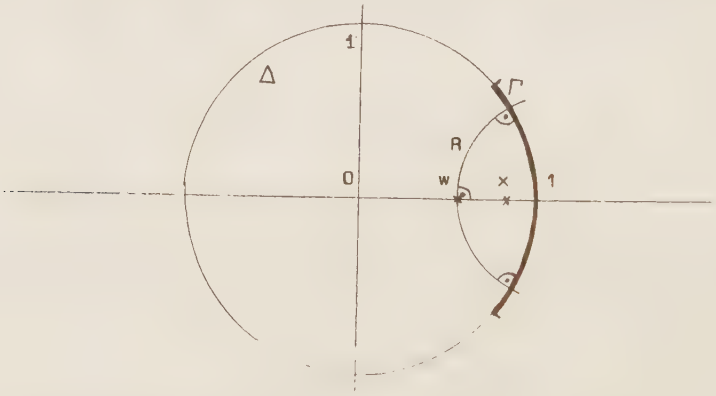
$$h|_{\Gamma} \leq 0, \quad h|_{\delta K \setminus \Gamma} \leq C,$$

dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $1-(2C^2)^{-1} < x < 1$, daß die harmonische Fortsetzung $\hat{h}$ von h auf K erfüllt

$$\hat{h}(x) \leq 2.$$

Beweis: Ist g die Funktion auf δK, die auf Γ gleich Null und auf $\delta K \setminus \Gamma$ gleich C ist, dann ist $\hat{h} \leq \hat{g}$. Ist $\tilde{g}$ die harmonische Fortsetzung von $g|_{\delta\Delta}$ nach Δ, dann ist $\tilde{g}(z) \leq \hat{g}(z) - C(\log 4)^{-1}\log|z|$ für alle $z \in K$.

Setze $w := x^{-1}(1-\sqrt{1-x^2})$, dann ist $1-C^{-1} < w < 1$, also trifft der bez. Konjugation symmetrische Kreisrand R, der durch w geht und $\delta\Delta$ rechtwinklig schneidet, $\delta\Delta$ in Γ.



Die Möbiustransformation $z \mapsto \frac{z-x}{1-xz}$ wirft Δ auf Δ, $[-1,1]$ auf $[-1,1]$, x auf 0 und w auf $-w$, also $R \cap \Delta$ auf $-R \cap \Delta$ und $\delta\Delta \setminus \Gamma$ in $-\Gamma$. Wir erhalten also:

$$\tilde{g}(x) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\Delta\setminus(-\Gamma)} 0\,d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_{-\Gamma} C\,d\sigma \leq 1.$$

Außerdem haben wir:

$$-C(\log 4)^{-1}\log x \leq -C(\log 4)^{-1}\log(1-\tfrac{1}{2}C^{-2}) \leq C^{-1}(\log 4)^{-1} \leq 1.$$

Folgerung 3.12: Sei $t>0$, $K := \{z\in\mathbf{C} \mid \tfrac{1}{2}t<|z|<2t\}$, $C>1$, $D\geq 0$ und h eine reellwertige, bez. des Bogenmaßes auf δK integrierbare Funktion. Wenn für $\Gamma := \{\tfrac{1}{2}te^{i\varphi} \mid \alpha-\pi/C \leq \varphi \leq \alpha+\pi/C\}$

[oder $\Gamma := \{2te^{i\varphi} \mid \alpha-\pi/C \leq \varphi \leq \alpha+\pi/C\}$]

$$h|_\Gamma \leq D \text{ und } h|_{\delta K\setminus\Gamma} \leq C,$$

dann gilt für alle $z\in K$ mit $\arg z = \alpha$ und $\tfrac{1}{2}t < |z| < \tfrac{1}{2}t+\tfrac{1}{4}tC^{-2}$

[oder $2t-\tfrac{1}{4}tC^{-2} < |z| < 2t$],

daß $$\hat{h}(z) \leq 2+D,$$

wenn $\hat{h}$ die harmonische Fortsetzung von h nach K ist.

Beweis: Betrachte statt $\hat{h}$ die Funktion $\mathring{h}$: $z \mapsto \hat{h}(e^{i\alpha}\tfrac{1}{2}tz^{-1})-D$ [oder $\mathring{h}$: $z \mapsto \hat{h}(e^{i\alpha}2tz)-D$] und wende darauf 3.12 an.

Satz 3.13: Sei p wie in 3.7 und f kein Polynom. Dann gibt es eine Folge $(a_j)_{j\in\mathbf{N}}$ in $\mathbf{C}$ so, daß $|a_j| \longrightarrow \infty$, eine Folge $(s_j)_{j\in\mathbf{N}}$ mit $s_j>0$ $(j\in\mathbf{N})$ und

1) $-\log s_j = o(q(a_j))$

sowie eine Folge $(\varphi_j)_{j\in\mathbf{N}}$ nach unten beschränkter, stetiger subharmonischer Funktionen auf $\mathbf{C}$ mit

2) $\forall\, k\in\mathbf{N}\ \exists\, C_k<\infty, m(k)\in\mathbf{N}\ \forall\, j\in\mathbf{N}, z,y\in\mathbf{C}$ mit $|y-a_j|<s_j$:

$$\varphi_j(z)+\tfrac{1}{m(k)}q(a_j) \leq C_k+\tfrac{1}{k}q(z)+\varphi_j(y).$$

Beweis: Es gibt eine Folge $(c_j)_{j\in\mathbf{N}}$ so, daß für $r_j := |c_j|$ und r aus 3.7 zu p $r_j\uparrow\infty$ und $\log|f(c_j)| < -r(2r_j)$ $(j\in\mathbf{N})$. Wenn es unendlich viele Nullstellen von f gibt, nehmen wir nämlich einfach eine Teilmenge davon. Ist dies nicht der Fall, ist wegen des Hadamardschen Produktsatzes

$$f(z) = e^{Q(z)}P(z) \quad (z\in\mathbf{C}),$$

wo P,Q Polynome sind und $m := \deg Q > 0$ gilt. Also gibt es ein $C>0$ so, daß $M_C := \{z \mid |e^{-Q(z)}| > e^{C|z|^m}\}$ unbeschränkt ist. Da dann $|e^{Q(z)}|$ den Betrag von f beherrscht, läßt sich $(c_j)_{j\in\mathbf{N}}$ mit den verlangten Eigenschaften in M_C finden.

Im Folgenden werden wir in endlich vielen Schritten jeweils endlich viele c_j weglassen, ohne die Bezeichnung zu ändern.

Sei $M(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)|$, dann ist wegen 3.9

$$\log_+ r_j = o(\log_+ M(r_j)).$$

Sei weiter

$$A_j := \{z \in \mathbf{C} \mid \tfrac{1}{2} r_j \leq |z| < 2r_j\},$$

und sei $R < \infty$ eine Konstante, für die gilt:

Ist h positiv und harmonisch auf $\{z \in \mathbf{C} \mid \tfrac{1}{4} < |z| < 1\}$, dann ist für alle $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ mit $|z_1| = |z_2| = \tfrac{1}{2}$

$$R^{-1} h(z_1) \leq h(z_2) \leq R h(z_1)$$

(vgl. für die Harnacksche Ungleichung z.B. Helms [1], Satz 2.16).

Wir setzen weiter

$$\psi_j(z) := \sup\{g(z) \mid g \text{ subh. auf } \mathbf{C},\ \forall\, z \notin A_j\ g(z) \leq \max(\log|f(z)|, -r(2r_j))\}.$$

Es ist also (z.B. wegen Helms [1], Lemma 7.11) ψ_j auf A_j harmonisch und für fast alle j (o.E. für alle) größer als $-r(2r_j)$. ψ_j ist auf $\mathbf{C}$ stetig, subharmonisch und größer oder gleich $-r(2r_j)$.

Insbesondere ist $\psi_j(c_j) + r(2r_j) \geq R^{-1}(\log M(r_j) + r(2r_j))$, also

1) $\psi_j(c_j) \geq R^{-1} \log M(r_j) - (1 - R^{-1}) r(2r_j) \geq (2R)^{-1} \log M(r_j)$

ab einem bestimmten j, o.E. ab 1.

a_j sei ein Punkt in $\mathbf{C}$, wo $z \mapsto \psi_j(z) - \max(\log|f(z)|, -r(2r_j))$ ihr Maximum annimmt.

Wir erhalten dann:

2) $a_j \in A_j$, da für $z \notin A_j$ $\psi_j(z) = \max(\log|f(z)|, -r(2r_j))$.

3) $|f(a_j)| = e^{-r(2r_j)}$, denn $\max(\log|f(z)|, -r(2r_j))$ ist harmonisch in allen z außer denen, wo $\log|f(z)| = -r(2r_j)$, und ψ_j ist harmonisch auf A_j. 3) folgt also aus dem Randmaximumprinzip.

4) $\psi_j(a_j) \geq \tfrac{1}{2} R^{-1} \log_+ M(r_j)$,

denn $\psi_j(a_j) + r(2r_j) \geq \psi_j(c_j) + r(2r_j)$ nach Definition von a_j.

5) $\psi_j(a_j) = o(p|(a_j))$,

weil $\psi_j(a_j) \leq \sup_{z \in \delta A_j} \log_+|f(z)|$, $\log_+|f| = o(p|)$ und $\sup_{z \in \delta A_j} p|(z) \leq A^2 p|(a_j) + AB + B$ mit A, B aus 1.1.2''') zu p.

6) $-\log d(a_j,\delta A_j) = o(p|(a_j))$,
denn sei w eine (nach 3.1 existierende) radiale induktive Gewichtsfunktion auf $\mathbf{C}$ mit 1.1.2''), $w=o(p|)$ und $e,|f|,|\partial f| \leq e^w$, sei $D<\infty$ mit $w(4z) \leq Dw(z)+D$ $(z\in\mathbf{C})$, sei weiter:

$$C_j := 4\pi r_j e^{Dw(a_j)+D}.$$

Angenommen, eine Teilfolge von $(a_j)_j$ (wir schreiben sie als die ganze Folge) erfüllte $d(a_j,\delta A_j) \leq \frac{1}{4}r_j C_j^{-2}$, dann folgte wegen $|f(a_j)| \leq 1$, daß für $|y-a_j| \leq 4r_j\pi C_j^{-1}$:

$$||f(y)|-1| \leq |y-a_j| \sup_{w\in[y,a]} |\partial f(w)| \leq |y-a_j|C_j(4\pi r_j)^{-1} \leq 1.$$

Also wäre insbesondere für $\alpha_j := \arg a_j$ auf $\{\frac{1}{4}r_j e^{i\varphi} \mid \alpha_j-\pi/C_j<\varphi<\alpha_j-\pi/C_j\}$ [oder $\{2r_j e^{i\varphi} \mid \alpha_j-\pi/C_j<\varphi<\alpha_j+\pi/C_j\}$] jeweils $\log_+|f| \leq \log 2$.

Auf A_j ist nach Voraussetzung $\log_+|f| \leq e^{Dw(a_j)+D} \leq C_j$, also gälte wegen 3.12 $\psi_j(a_j) \leq 2+\log 2$. Da wir wegen 4) wissen, daß $\psi_j(a_j) \longrightarrow \infty$, haben wir also ab einem bestimmten j

$$-\log d(a_j,\delta A_j) \leq \log(4C_j^2 r_j^{-1}) =$$

$$= \log(64\pi^2)+2D+\log r_j+2Dw(a_j) = o(p|(a_j)).$$

Wir setzen jetzt für $\alpha\geq 1$ aus 1.3 zu p ein s fest mit $0 < s < \alpha^{-1}$, und definieren weiter

$$b_j := p|(a_j)(\psi_j(a_j))^{-1}.$$

Wegen 5) gilt $b_j \longrightarrow \infty$, also o.E. $b_j \geq 1$ für alle $j\in\mathbf{N}$.

Schließlich setzen wir fest:

$$s_j := |a_j|^{-\alpha} d(a_j,\delta A_j),$$

$$\varphi_j(z) := b_j\psi_j(z)-b_j s^{-1}(\log b_j-\log s),$$

$$\rho_j(z) := b_j \max(\log|f(z)|,-r(2r_j))-b_j s^{-1}(\log b_j-\log s).$$

Wegen 6) und 1.1.3) für p| gilt 3.13.1).

3.10 ergibt

7) $|f(z)|^s \geq \rho_j(z)$ für alle $z \in \mathbf{C}$.

Weiter erhalten wir

$$8)\quad -\rho_j(a_j) = \left[\frac{r(2r_j)}{\psi_j(a_j)} + \frac{1}{s\psi_j(a_j)}(\log b_j - \log s)\right] p|(a_j) = o(p|(a_j)),$$

denn für $\psi_j(a_j) > 1$ haben wir

$$\frac{r(2r_j)}{\psi_j(a_j)} + \frac{1}{s\psi_j(a_j)}(\log p|(a_j) - \log\psi_j(a_j) - \log s) \leq$$

$$\leq \frac{r(2r_j)}{\psi_j(a_j)} + \frac{\text{const.}\,\alpha\log|a_j| + \text{const.}}{s\psi_j(a_j)} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

da wegen 3.9 und 4) $\log|a_j| = o(\psi_j(a_j))$.

Deswegen, und weil nach Definition $b_j\psi_j(a_j) = p|(a_j)$, gilt für große j (o.E. also für alle j), daß

9) $p|(a_j) \geq \varphi_j(a_j) \geq \tfrac{1}{2}p|(a_j)$.

Für $|y-a_j| < s_j$ ist, da $\psi_j + r(2r_j)$ auf dem Kreis $\{y \mid |y-a_j| < d(a_j, \delta A_j)\}$ positiv und harmonisch ist, nach der Harnackschen Ungleichung (vgl. Helms [1], Satz 2.14, p.41)

$$\varphi_j(a_j) - \varphi_j(y) = b_j(\psi_j(a_j)+r(2r_j)) - b_j(\psi_j(y)+r(2r_j)) \leq$$

$$\leq p|(a_j)\left[1+\frac{r(2r_j)}{\psi_j(a_j)}\right]\left[1-(1-|a_j|^{-2\alpha})(1-|a_j|^{-\alpha})^2(1+|a_j|^{-\alpha})^{-2}\right] =$$

$$= p|(a_j)\left[1+\frac{r(2r_j)}{\psi_j(a_j)}\right]\left[\frac{4|a_j|^{2\alpha}-3|a_j|^{\alpha}+1}{|a_j|^{2\alpha}(|a_j|^{\alpha}+1)}\right] =: E_j < \infty.$$

$(E_j)_{j\in\mathbf{N}}$ ist durch ein $E<\infty$ beschränkt, weil $p|$ 1.2 mit α erfüllt

und $\left[1+\frac{r(2r_j)}{\psi_j(a_j)}\right]_{j\in\mathbf{N}}$ beschränkt ist wegen 3.9 und 4).

Für $k \in \mathbf{N}$ seien jetzt jeweils:

$$C_{1,k} := \max_{z \in \mathbf{C}} (|f(z)|^s - \tfrac{1}{k} q(z)) < \infty \text{ (weil } s < \alpha^{-1}),$$

$$C_{2,k} := \max_{j \in \mathbf{N}} (-\rho_j(a_j) - \tfrac{1}{k} p|(\tfrac{1}{4} a_j)) < \infty \text{ (wegen 8)),}$$

$$m(k) := 3k4^{\alpha} C, \text{ wo C von 1.1.2) zu p kommt,}$$

$$C_k := C_{1,3k} + C_{2,3k} + E + (A+1)B + C, \text{ mit A,B von 1.1.2''') zu p.}$$

Nun verifizieren wir 3.13.2).

1. Fall: $z \in A_j$, dann sind

A) $\varphi_j(z) - \rho_j(z) \leq \varphi_j(a_j) - \rho_j(a_j) \leq E + \varphi_j(y) - \rho_j(a_j)$,

B) $0 \leq C_{2,3k} + \frac{1}{3k} p|(\frac{1}{4} a_j) + \rho_j(a_j) \leq C_{2,3k} + \frac{1}{3k} q(z) + \rho_j(a_j)$,

C) $\rho_j(z) \leq |f(z)|^s \leq \frac{1}{3k} q(z) + C_{1,3k}$,

D) $\frac{1}{m(k)} q(a_j) = \frac{1}{3kC} 4^{-\alpha} p(|a_j|, e^{-r(2r_j)}) \leq \frac{1}{3k} 4^{-\alpha} p|(a_j) + C \leq$

$\leq \frac{1}{3k} q(z) + (A+1)B + C.$

Addition der äußersten linken und rechten Terme der Ungleichungen ergibt 3.13.2).

2. Fall: $z \notin A_j$, dann folgen

A) $\varphi_j(z) = \rho_j(z) \leq |f(z)|^s \leq \frac{1}{3k} q(z) + C_{1,3k}$,

B) $\frac{1}{m(k)} q(a_j) \leq \frac{1}{2C} q(a_j) = \frac{1}{2C} p(|a_j|, -r(2r_j)) \leq \frac{1}{2} p|(a_j) + C \leq$

$\leq \varphi_j(a_j) + C \leq \varphi_j(y) + E + C$,

C) $0 \leq \frac{2}{3k} q(z) + C_{2,3k} + (A+1)B$.

Addition von A), B) und C) ergibt wieder 3.13.2).

Aus den subharmonischen φ_j lassen sich jetzt holomorphe g_j mit ähnlichen Abschätzungen wie e^{φ_j} konstruieren.

Satz 3.14: Sei p wie in 3.7, f kein Polynom. Dann gibt es eine Folge $(a_j)_{j\in\mathbf{N}}$ in $\mathbf{C}$, $|a_j|\uparrow\infty$ und eine Folge $(g_j)_{j\in\mathbf{N}}$ in A°_q so, daß

1) $g_j(a_j) = 1 \quad (j\in\mathbf{N})$

und weiter

2) $\forall\, k\in\mathbf{N}\ \exists\, D_k<\infty, m(k)\in\mathbf{N}\ \forall\, j\in\mathbf{N}, z\in\mathbf{C}$:

$$|g_j(z)| \le D_k e^{\frac{1}{k}q(z)-\frac{1}{m(k)}q(a_j)}.$$

Beweis: (vgl. Hörmander [2], Th. 4.4.4 für die Idee)

Sei $\gamma \in C^\infty(\mathbf{C})$, $0\le\gamma\le 1$, $\gamma|_{\frac{1}{2}\overline{\Delta}} \equiv 1$, $\gamma|_{\Delta^c} \equiv 0$, $D := \sup_{z\in\mathbf{C}}|\bar\partial\gamma(z)|$.

Seien $(a_j)_{j\in\mathbf{N}}, (s_j)_{j\in\mathbf{N}}, (\varphi_j)_{j\in\mathbf{N}}$ aus 3.9 gegeben, o.E. so, daß $s_j<1$ $(j\in\mathbf{N})$, und sei $\gamma_j(z) := \gamma(s_j^{-1}(z-a_j))$.

Nach Hörmander [2], Th. 4.4.2 finden wir $(v_j)_{j\in\mathbf{N}}$ so, daß $\bar\partial v_j = (z-a_j)^{-1}\bar\partial\gamma_j$ und

$$(\times)\quad \int_{\mathbf{C}}|v_j(z)|^2 e^{-2\varphi_j(z)}(1+|z|^2)^{-2}d\lambda(z) \le$$

$$\le \int_{\mathbf{C}}|z-a_j|^{-2}|\bar\partial\gamma_j(z)|^2 e^{-2\varphi_j(z)}d\lambda(z).$$

Die $g_j(z) := \gamma_j(z)-(z-a_j)v_j(z)$ erfüllen dann $g_j \in H(\mathbf{C})$, $g_j(a_j) = \gamma_j(a_j) = 1$.

Wegen $\sup_{z\in\mathbf{C}}\frac{|z-a_j|^2}{1+|z|^2} \le 1+(1+|a_j|)^2$ folgt aus $(\times)$, daß

$$\left\{\int_{\mathbf{C}}|g_j(z)|^2 e^{-2\varphi_j(z)}(1+|z|^2)^{-3}d\lambda\right\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\left\{\int_{\substack{|z|\\|z-a_j|\le s_j}} e^{-2\varphi_j(z)}d\lambda(z)\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\int_{\mathbf{C}}|v_j(z)|^2 e^{-2\varphi_j(z)}(1+|z|^2)^{-3}|z-a_j|^2 d\lambda(z)\right\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le (1+2Ds_j^{-2})\left\{1+(1+|a_j|)^2\right\}^{\frac{1}{2}})\left\{\int_{\substack{|z|\\|z-a_j|\le s_j}} e^{-2\varphi_j(z)}d\lambda(z)\right\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le (1+2Ds_j^{-2}(1+(1+|a_j|)^2)^{\frac{1}{2}})s_j\sqrt{\pi}e^{-t_j}, \text{ wenn}$$

$$t_j := \inf\{\varphi_j(y) \mid |y-a_j| < s_j\} \text{ ist.}$$

3.13.2) bedeutet $-\frac{2}{l}q(z) \leq -2\varphi_j(z)-\frac{2}{m(l)}q(a_j)+2C_l+2t_j$, $(l\in\mathbf{N})$ also folgt mit 1.6.2) für q:

$$\|g_j\|_{\frac{1}{k},q} \leq \widetilde{K}(\tfrac{1}{k},q)^{-1}\left\{\int_{\mathbf{C}}|g_j|^2 e^{-\frac{2}{K(q)k}q}d\lambda\right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq L_k\left\{\int_{\mathbf{C}}|g_j(z)|^2 e^{-\frac{1}{K(q)k}q(z)}(1+|z|^2)^{-3}d\lambda(z)\right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq L_k(1+2Ds_j^{-2}(1+(1+|a_j|)^2)^{\frac{1}{2}})s_j\sqrt{\pi}e^{C_{2K(q)k}-\frac{1}{m(2K(q)k)}q(a_j)} ,$$

für ein L_k, das nicht von j abhängt.

Wegen 1.1.3) für q, 3.13.1) und $s_j<1$ können wir schließlich abschätzen :

$$\|g_j\|_{\frac{1}{k},q} \leq D_k e^{-\frac{1}{2m(2K(q)k)}q(a_j)} ,$$

wo D_k ebenfalls nicht von j abhängt. Das beweist den Satz.

Die g_j aus 3.14 lassen sich verwenden, um die Rechtsinverse zur Abbildung auf den Quotientenraum nach einem geeigneten unendlich-kodimensionalen Hauptideal in A_q° zu bilden. Wir definieren mit ihnen nämlich die Urbilder der kanonischen Basis des Quotientenraumes in der Darstellung von 2.26.

Beweis von Theorem 3.8: (vgl. Meise-Taylor [3] für ein Beispiel einer solchen Konstruktion und eine radiale Gewichtsfunktion q so, daß A_q° ein komplementiertes unendlich-kodimensionales Hauptideal hat)

I) Konstruktion von g.

Wir wählen eine Teilfolge der $(a_j)_{j\in\mathbf{N}}$ aus 3.14 (die wir wieder $(a_j)_{j\in\mathbf{N}}$ nennen) und K>1 so, daß für

$$g(z) := K\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_j}\right) \quad \text{gilt:}$$

1) $|a_1| \geq 1$,

2) $\forall\, j\in\mathbf{N} : |a_{j+1}| > 10|a_j|$,

3) $\max_{j\in\mathbf{N}}(\log|g(z)\left(1-\frac{z}{a_j}\right)^{-1}|) = o(p|(z))$,

4) $\forall\, j\in\mathbf{N}\ |\partial g(a_j)| = \left|\frac{K}{a_j}\right|\prod_{k\neq j}\left|1-\frac{a_j}{a_k}\right| \geq 1.$

Wir erreichen zuerst durch Ausdünnen der a_j 1), 2) und weiter, daß auf den Kompakta $\{r\geq 0 \mid j^2\log(1+r) \geq p|(r)\}$ für $j\in\mathbf{N}$ jeweils

$$\log\left(1+\frac{r}{|a_j|}\right) \leq \frac{1}{2^j} \quad \text{ist.}$$

Addition ergibt dann

$$\sum_{j=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{r}{|a_j|}\right) = o(p|(r)),$$

woraus 3) folgt. Schließlich setzen wir $K := 2\delta^{-1}|a_1|$ für

$$\delta := \prod_{l=1}^{\infty}(1-10^{-l}) > \frac{1}{2},$$

denn damit wird

$$|\partial g(a_j)| \geq 2\delta^{-1}|a_1|\left|\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_j}\right|\prod_{i=2}^{j-1}\left|1-\frac{a_j}{a_i}\right|\delta \geq \prod_{i=2}^{j-1}\left|1-\frac{a_j}{a_i}\right| \geq 1.$$

II) g ist projektiv langsam fallend bez. q.

Sei r die Funktion aus 1.1.2) und 3.6) zu q, sei

$$\rho(z) := r(z)+\log(1+|z|^2)+\log 5.$$

Wir setzen weiter $U_k := \{z \mid |a_{k-1}|\leq|z|<|a_k|, \ z\in S_\rho(g)\}$ $(k\in\mathbf{N}, k\geq 2)$, $U_1 := \{z \mid |z|<|a_1|\}$ und erhalten für $k\geq 2$:

$$U_k \subset \{z \mid |a_{k-1}|\leq|z|<\tfrac{1}{2}|a_k|, \ \tfrac{1}{2}\delta\prod_{j\leq k-1}\left|1-\frac{z}{a_j}\right| < e^{-\rho(z)}\} \cup$$

$$\cup \{z \mid \tfrac{1}{2}|a_k|\leq|z|<|a_k|, \ \tfrac{4}{10}\delta|z-a_k|\left|\frac{1}{a_{k-1}}\right|\prod_{j<k-1}\left|1-\frac{z}{a_j}\right| < e^{-\rho(z)}\}.$$

Da für $|z| > |a_{k-1}|$ gilt $\prod_{j<k-1}\left|1-\frac{z}{a_j}\right| \geq 1$, folgt

$$U_k \subset \{z \mid |a_{k-1}|\leq|z|<\tfrac{1}{2}|a_k|, \ |z-a_{k-1}|<|z|\tfrac{2}{\delta}e^{-\rho(z)}\} \cup$$

$$\cup \{z \mid \tfrac{1}{2}|a_k|\leq|z|<|a_k|, \ |z-a_k|<|z|\tfrac{5}{2\delta}e^{-\rho(z)}\},$$

so daß $S_\rho(g) \subset \bigcup_{k\in\mathbf{N}} U_k \subset \bigcup_{k\in\mathbf{N}}\{z \mid |z-a_k|<e^{-r(z)}\}\cup U_1$. Dies ergibt II).

Wegen 2.26 und 2.37 ist $I(g) = I_{loc}(g)$ und

$$A_q^\circ/_{I(g)} \cong A_{qg}^\circ(I(g)) = \Lambda_0^\infty((q(a_j))_{j\in\mathbf{N}}).$$

Der letzte Raum ist wegen 1.6.4) und 1.17.2) gleich $\Lambda_0(q(a_j))$.

III) Wir definieren

$$\xi\colon \Lambda_0((q(a_j))_{j\in\mathbf{N}}) \longrightarrow A_q^\circ \text{ durch}$$

$$\xi((\lambda_j)_{j\in\mathbf{N}})(z) := \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j \frac{g(z)}{(z-a_j)\partial g(a_j)} g_j(z),$$

wo die g_j von 3.14 kommen. Es gilt dann wegen 4) und 3.14.2) für alle $l\in\mathbf{N}$:

$$\sup_{z\in\mathbf{C}} |\xi((\lambda_j))(z)| e^{-\frac{1}{l}q(z)} \leq$$

$$\leq \sup_{z\in\mathbf{C}} \sum_{j=1}^{\infty} \left|\frac{g(z)}{z-a_j}\right| e^{-\frac{1}{2l}q(z)} |\lambda_j| |g_j(z)| e^{-\frac{1}{2l}q(z)} \leq$$

$$\leq B_1 D_{2l} \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| e^{-\frac{1}{m(2l)}q(a_j)} = B_1 D_{2l} \|(\lambda_j)_j\|_{m(2l)},$$

wo $B_1 := \sup_{j,z} K|a_j|^{-1} \prod_{k\neq j} \left|1-\frac{z}{a_k}\right| e^{-\frac{1}{2l}q(z)} < \infty$ wegen 3), während D_{2l}, $m(2l)$ von 3.14 kommen. ξ ist also stetig und wegen 3.14.1) ein Rechtsinverses der Quotientenabbildung $A_q^\circ \to A_q^\circ/I(g)$, wie man leicht nachrechnet. Damit ist das Theorem bewiesen.

Bem. 3.15: Ist f ein Polynom vom Grad m, so kann 3.8 für dies f nicht gelten. Denn dann ist $A_q^\circ = A_s^\circ$ für $s(z) := p(z,|z|^m)$, und wegen 1.21 ist $A_s^\circ \cong H(\mathbf{C})$ als topologischer Vektorraum, so daß wir 2.27 anwenden können.

Der folgende Satz erlaubt vor allem, aus einem Hauptideal in A_p°, das nicht komplementiert ist, viele weitere zu bilden.

Satz 3.16: Sei p wie in 3.7, dann gelten:

1) Sind $G,H \in A_p^\circ\setminus\{0\}$, so hat $A_p^\circ/I(GH)$ genau dann eine der Eigenschaften (DN), (DN), (Ω) oder ($\overline{\Omega}$), wenn sowohl $A_p^\circ/I(G)$ als auch $A_p^\circ/I(H)$ diese Eigenschaft haben.

2) Sind $G,H \in A_p^\circ\setminus\{0\}$, so ist I(GH) genau dann in A_p° komplementiert, wenn sowohl I(G) als auch I(H) in A_p° komplementiert sind.

Beweis: 1) Die Sequenz $0 \to {}^{I(G)}/_{I(GH)} \to {}^{A_p^\circ}/_{I(GH)} \to {}^{A_p^\circ}/_{I(G)} \to 0$ ist exakt, und $F \mapsto FG$ induziert einen Isomorphismus von ${}^{A_p^\circ}/_{I(H)}$ nach ${}^{I(G)}/_{I(GH)}$. "<=" folgt also aus 1.13.5) und "=>" aus 1.13.3).

2) Die Sequenz $0 \to I(GH) \to A_p^\circ \to {}^{A_p^\circ}/_{I(GH)} \to 0$ zerfällt wegen 1.13.3) und 1.14 genau dann, wenn ${}^{A_p^\circ}/_{I(GH)}$ (DN) hat. Es ist nämlich $A_p^\circ \cong I(GH)$ durch $F \mapsto FGH$, und A_p° hat (Ω) wegen 1.21. Also folgt 2) aus 1).

Beispiel 3.17: Sei p wie in 3.7, $|(z,w)| = o(p(z,w))$. Dann ist $I := I(z(e^z-w))$ wegen 3.8, angewandt auf $I(e^z-w)$, wegen 2.20 und 1.13.3) nicht komplementiert in A_p°, ${}^{A_p^\circ}/_{I}$ hat aber nicht $(\overline{\Omega})$ wegen 3.16.1), denn ${}^{A_p^\circ}/_{I(z)} \cong A_p^\circ(0,w)$ hat nicht $(\overline{\Omega})$.

Der nächste Satz ist eine Vorbereitung zu den Theoremen 3.21, 3.22 und 3.23 und deckt dort den Fall ab, daß F nur von einer Variablen abhängt.

Satz 3.18: Sei p wie in 3.7, sei $f \in A_{p|}^\circ$, $f \neq 0$, $V(f)$ unendlich und $F(z,w) := f(z)$. Dann ist $I(F)$ in A_p° nicht komplementiert.

Beweis: Sei Φ: $A_{p|}^\circ \to A_p^\circ$ definiert durch $\Phi(g)(z,w) := g(z)$, dann ist Φ stetig und linear. Sei weiter für $G \in A_p^\circ$ $G|(z,w) := G(z,0)$, dann ist auch diese Abbildung stetig und linear von A_p° nach A_p°.

Man rechnet nach, daß $\mathrm{Im}\Phi + I(F) = \{G \in A_p^\circ \mid G - G| \in I(F)\}$. Insbesondere ist also $\mathrm{Im}\Phi + I(F)$ abgeschlossen, da nach 3.2 $I(F)$ abgeschlossen ist. Ist Θ: $A_p^\circ \to {}^{A_p^\circ}/_{I(F)}$ die Quotientenabbildung, dann ist $\ker(\Theta \circ \Phi) = I(f)$ und also ${}^{A_{p|}^\circ}/_{I(f)} \cong {}^{\mathrm{Im}\Phi + I(F)}/_{I(F)}$.

Nach dem Minimum-Modulus-Prinzip ist f projektiv langsam fallend (vgl. Berenstein-Taylor [1], Prop.4, p.131 für die

Rechnung), und also ist wegen 2.37 und 2.26 $A_p^o/_{I(f)}$ ein Potenzreihenraum von endlichem Typ. $A_p^o/_{I(F)}$ enthält folglich einen abgeschlossenen Unterraum, der nicht (DN) hat, kann also nicht isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum von $A_p^o \cong H(\mathbb{C}^2)$ sein.

Eine einfache Verallgemeinerung von Djakov-Mitiagin [1], Prop.18, p.100 ist

Satz 3.19: Sei p wie in 3.7, seien $Q_1,\ldots,Q_R$ Polynome in 2 Veränderlichen. Dann ist $I(Q_1,\ldots,Q_R)$ abgeschlossen und komplementiert in A_p^o.

Im Folgenden beweisen wir einige komplementäre Aussagen.

Lemma 3.20: Sei für $m\geq 1$

$$F(z,w) = f(z)-v(z,w) = f(z)+wp_1(z)+\ldots+w^{m-1}p_{m-1}(z)+w^m,$$

wo v,p_j $(j=1,\ldots,m-1)$ Polynome sind, f aber kein Polynom ist. Dann gelten:

1) Kein nichttriviales Polynom teilt F.
2) $V(\partial_2 F,F)$ ist diskret.
3) $H \in A_p^o$ liegt genau dann in I(F), wenn H auf V(F) gleich 0 ist.

Beweis: 1) Sei Q ein Polynom,

$$Q(z,w) = q_0(z)+wq_1(z)+\ldots+w^l q_l(z),\ q_l\neq 0$$

und $H(z,w) = h_0(z)+wh_1(z)+\ldots+w^n h_n(z)$, $n+l=m$, $HQ = F$.

Wenn $l=0$ ist, folgt durch Koeffizientenvergleich $1 = q_0 h_m$, q_0 ist also konstant. Wenn $l>0$, schließen wir induktiv:

$q_l h_n = 1$ $\Rightarrow$ h_n ist ein Polynom.

$q_{l-1}h_n+q_l h_{n-1} = p_{m-1}$ $\Rightarrow$ h_{n-1} ist ein Polynom.

$\ldots$

$q_{l-n}h_n+\ldots+q_l h_0 = p_1$ $\Rightarrow$ h_0 ist ein Polynom.

Also müßte auch $f = q_0 h_0$ ein Polynom sein mit Widerspruch zu den Voraussetzungen.

2) Hätte für irgendein $a \in W := V(\partial_2 F, F)$ der Keim $W|_a$ eine irreduzible Komponente Y von Dimension 1, so müßte Y auch eine irreduzible Komponente von $V(\partial_2 F)|_a$ sein, denn eine Y echt enthaltende Komponente hätte eine höhere Dimension als Y (vgl. z.B. Gunning-Rossi [1], Chap.III, Sec.C, Th.14). Wegen des Hilbertschen Nullstellensatzes (vgl. z.B. Gunning-Rossi [1], Chap.II, Sec.E, Th.20 und Chap.III, Sec.A, Th.7) ist Y der Keim in a der Nullstellenvarietät eines Primfaktors von $[\partial_2 F]_a$, und der ist ein Polynom wegen Serre [1], Prop. 4. Dies nichttriviale Polynom müßte F teilen mit Widerspruch zu 1). Also ist W diskret.

3) "=>" ist trivial.

"<=" $[F]_a$ ist reduzibel höchstens auf $V(\partial_2 F, F)$. Diese Menge ist wegen 2) diskret, und aus $H|_{V(F)} \equiv 0$ folgt, daß $\frac{H}{F}$ außerhalb von $V(\partial_2 F, F)$ wohldefiniert und holomorph ist. Da die Singularitäten einer holomorphen Funktion von 2 Veränderlichen aber keine nichtleere diskrete Menge bilden können, ist $\frac{H}{F}$ ganz und also wegen 3.2 in A_p^o.

Theorem 3.21: Sei p wie in 3.7, seien $f \in A_{p|}^o$ und $F(z,w) := f(z) - w^m$ für $m>0$. Dann ist I(F) in A_p^o genau dann komplementiert, wenn f ein Polynom ist.

Theorem 3.22: Sei p wie in 3.7 und erfülle 1.1.2*). Sei $f \in A_{p|}^o$, v ein Polynom in w, $F(z,w) := f(z) - v(w)$. Dann ist I(F) in A_p^o genau dann komplementiert, wenn eine der folgenden Aussagen gilt:

a) f ist ein Polynom.

b) v ist konstant und f-v hat höchstens endlich viele Nullstellen.

Theorem 3.23: Sei p wie in 3.7 und radial, seien $f \in A_{p|}^o$,

$$v(z,w) := \sum_{i+j \le m} a_{i,j} z^i w^j \text{ mit } a_{0,m} \neq 0,$$

$$F(z,w) := f(z) - v(z,w).$$

Dann ist I(F) genau dann in A_p^o komplementiert, wenn eine der folgenden Aussagen gilt:

1) f ist ein Polynom.

2) $m=0$ und $f - a_{0,0}$ hat höchstens endlich viele Nullstellen.

Bem. 3.24: Die Theoreme 3.21, 3.22, 3.23 besagen genau, daß die in ihnen betrachteten I(F) dann und nur dann komplementiert sind in A_p°, wenn F Polynom mal Einheit in A_p° ist.

Wir beweisen jetzt Theorem 3.23. 3.21 und 3.22 werden genauso bewiesen, nur sind einige Abschätzungen dort leichter zu verifizieren, weil v dort einfacher ist.

Beweis: "<=" folgt direkt aus 3.19.

"=>": Ist v eine Konstante, dann ergibt 3.18, daß V(f-v) in $\mathbf{C}$ endlich ist, also entweder f ein Polynom oder v der Ausnahmewert von f ist.

Sei also ab jetzt m := degv > 0 und f kein Polynom. Wir zeigen, daß $A_p^\circ/_{I(F)}$ nicht (DN) haben kann, woraus mit 1.13.3, 1.20 und 1.21 das Theorem folgt.

Es seien $T := \{H \in A_p^\circ \mid \exists\, G \in H(\mathbf{C}^2)\ \forall\, z,w \in \mathbf{C} : H(z,w)=G(z,v(z,w))\}$ und $p'(z,w) := p(z,|w|^{\frac{1}{m}})$. Dann ist p' wieder eine komponentenweise radiale projektive Gewichtsfunktion, die 1.1.2*) und 1.1.2''') erfüllt, wie man leicht nachrechnet.

$\Phi: A_{p'}^\circ \to A_p^\circ$ mit $\Phi(G)(z,w) := G(z,v(z,w))$ ist stetig mit Bild in T, da sich $|z|^2+|v(z,w)|^{\frac{2}{m}}$ für große z,w wie $C_1|z|^2+C_2|w|^2$ mit passenden $0<C_1,C_2<\infty$ verhält.

Ist $\Theta: A_p^\circ \to A_p^\circ/_{I(F)}$ die Quotientenabbildung, dann ist $\ker(\Theta\circ\Phi) = I(F')$, wo $F'(z,w) := f(z)-w$. Mit 3.1 läßt sich eine induktive Gewichtsfunktion $\tilde{q}$ auf $\mathbf{C}$ finden so, daß $f \in A_{\tilde{q}}$, $\tilde{q}=o(p|)$. Für $q(z,w) := \tilde{q}(z)+\log(1+|w|^2)$ gilt

$$-\log(D_1F'(z,w)) \le 0 = O(q(z,w)),$$

also folgt aus 2.20, daß die kanonische Abbildung $A_{p'}^\circ/_{I(F')} \to A_{q'}^\circ$ bijektiv und stetig ist für $q'(z) := p'(z,f(z))$, folglich ein Isomorphismus.

Sei [L] die zu $L \in A_p^\circ$ gehörende Äquivalenzklasse in $A_p^\circ/_{I(F)}$ und sei $([H_j])_{j\in\mathbf{N}}$ eine Folge von Elementen von $T+I(F)/_{I(F)}$, die in

$A_p^o/_{I(F)}$ konvergiert. Wegen Köthe [1], Vol.2, 33,4,(2) konvergieren dann o.E. die H_j gegen ein $H \in A_p^o$. Dies H erfüllt für alle (z,w), $(z,w') \in V(F)$: $H(z,w) = H(z,w')$.

$$g(z) := H(z,w), \text{ falls } (z,w) \in V(F)$$

ist also wohldefiniert, da es für jedes $z \in \mathbf{C}$ ein w gibt mit $f(z)-v(z,w) = 0$. g ist lokal beschränkt, außerdem holomorph in allen z, wo $\partial_2 F(z,w) \neq 0$ für ein w mit $F(z,w) = 0$. Da wegen 3.19.2) $V(\partial_2 F, F)$ diskret ist und F, $\partial_2 F$ Polynome in w von Grad m resp. m-1 sind, ist $\{z \mid \exists\, w \in \mathbf{C} : (z,w) \in V(\partial_2 F, F)\}$ diskret. Insbesondere sind alle Singularitäten von g hebbar.

g liegt in A_q^o, denn für alle $\varepsilon > 0$ ist

$$\sup_{z \in \mathbf{C}} |g(z)| e^{-\varepsilon p(|z|, |f(z)|^{\frac{1}{m}})} =$$

$$= \sup_{(z,w) \in V(F)} |H(z,w)| e^{-\varepsilon p(|z|, |v(z,w)|^{\frac{1}{m}})} =$$

$$= \sup_{(z,w) \in V(F)} |H(z,w)| e^{-\varepsilon p(\sqrt{|z|^2 + |v(z,w)|^{\frac{2}{m}}})} \leq$$

$$\leq \sup_{(z,w) \in V(F)} |H(z,w)| e^{-\varepsilon K p(|z|, |w|) + \varepsilon K} < \infty$$

für ein passendes $K > 0$.

Weil die Einschränkung auf V(F') einen Isomorphismus von $A_{p'}^o/_{I(F')}$ nach A_q^o, induziert, gibt es ein $G \in A_{p'}^o$ mit $g(z) = G(z, f(z))$ $(z \in \mathbf{C})$. Also ist $\Phi(G) \in [H]$ wegen 3.20.3) und insbesondere ist $[H] \in {}^{T+I(F)}/_{I(F)}$. Das heißt, daß ${}^{T+I(F)}/_{I(F)}$ in $A_p^o/_{I(F)}$ abgeschlossen ist und ${}^{T+I(F)}/_{I(F)} \cong A_{p'}^o/_{I(F')} \cong A_q^o$.

Wegen 3.8 enthält A_q^o einen abgeschlossenen Unterraum, der isomorph zu einem Potenzreihenraum von endlichem Typ ist. Also hat auch $A_p^o/_{I(F)}$ nicht (DN).

Kontrastierend zu den Theoremen 3.21, 3.22, 3.23 besagt Meise-Taylor [2], Cor. 15, für den induktiven Fall:

Sei p: $\mathbf{C}^N \to [0,\infty[$ eine radiale projektive Gewichtsfunktion mit 1.1.2''). Dann ist jedes Hauptideal I in A_p abgeschlossen und komplementiert. Der Beweis benutzt, daß $(A_p)'_b$ (DN) und $({}^{A_p}/_I)'_b$ (Ω) hat und wendet dann das Splitting-Theorem 1.14 auf die duale Sequenz

$$0 \to ({}^{A_p}/_I)'_b \to (A_p)'_b \to (I)'_b \to 0$$

an. Das Problem im projektiven Fall ist, daß wir keine Methode haben, 'direkt' zu sehen, daß ${}^{A_p^\circ}/_I$ für ein Hauptideal I nicht (DN) hat, wenn I nicht von einem Polynom erzeugt wird.

KAPITEL 4

In diesem Kapitel leiten wir aus den Hauptergebnissen der Arbeit durch Fourier-Borel-Transformation Aussagen über Nullräume von Faltungsoperatoren ab.

Zuerst führen wir eine für unsere Zwecke geeignete Verallgemeinerung der Martineau-Dualität ein (vgl. dazu Martineau [1], Taylor [1] und Meise-Taylor [1]).

Def. 4.1: Sei q eine konvexe, stetige, komponentenweise radiale induktive Gewichtsfunktion auf $\mathbb{C}^N$ mit $|z| = o(q(z))$. Für $r := (|z_1|,\dots,|z_N|)$ definieren wir:

$$q^*(z) := \sup\{\langle r,s\rangle - q(s) \mid s\in[0,\infty[^N\}.$$

Vergleiche hierzu auch 1.23.

Lemma 4.2: Sei q wie in 4.1 und erfülle
1) $\exists\ 1<D<A_1<A_2<\infty,\ B_1,B_2<\infty\ \forall\ z\in\mathbb{C}^N : A_1q(z)-B_1 \le q(Dz) \le A_2q(z)+B_2$.
Dann ist q^* eine konvexe, komponentenweise radiale projektive Gewichtsfunktion mit 1.1.2*), die ebenfalls 1), wenn auch mit eventuell anderen Konstanten, erfüllt. Weiter ist $(q^*)^*=q$, und q erfüllt 1.1.2*).

Beweis: Für $s \in [0,\infty[^N$ ist

$$(+)\quad q^*(\tfrac{A_1}{D}s) = \sup_r\ (\langle A_1s,r\rangle - q(Dr)) \le \sup_r\ (A_1\langle s,r\rangle - A_1q(r)) + B_1 = A_1q^*(s)+B_1.$$

Analog zeigt man $q^*(\frac{A_2}{D}s) \ge A_2q^*(s)-B_2$ für $s \in [0,\infty[^N$.

Durch Iteration von (+) findet man $\tilde{A}_2,\tilde{B}_2<\infty$ so, daß $q^*(\frac{A_2}{D}s)\le\tilde{A}_2q^*(s)+\tilde{B}_2$ $(s \in [0,\infty[^N)$, was 1) für q^* zeigt.

Offenbar erfüllt q^* 1.1.1) und 1.1.3).

Seien $r,s \in [0,\infty[^N$ so, daß $r-s \in [-1,1]^N$ und sei $v := (|r_1-s_1|,\dots|r_N-s_N|)$. Dann ist

$$q^*(r) = \sup_t(\langle s+(r-s),t\rangle - q(t)) \le \sup_t(\langle s,t\rangle - \tfrac{1}{2}q(t)) + \sup_t(\langle v,t\rangle - \tfrac{1}{2}q(t)) =$$

$$= \tfrac{1}{2}q^*(2s) + \tfrac{1}{2}q^*(2v) \le Cq^*(s) + C$$

für passendes, von r,s unabhängiges $C<\infty$, weil q^* 1) erfüllt und auf $[0,1]^N$ beschränkt ist. Also erfüllt q^* 1.1.2*).

Standardtheorie konvexer Funktionen (vgl. Rockafellar[1], Th. 12.2, p.104) ergibt $(q^*)^* = q$, und durch Vertauschung von q und q^* im obigen Argument folgt 1.1.2*) für q.

Def. 4.3: Sei q wie in 4.2, $\mu \in (A_q)'$. Dann definieren wir die Fourier-Borel-Transformierte $F(\mu)$ durch

$$F(\mu)(z) := \langle \mu_\xi, e^{\langle \xi, z\rangle}\rangle \quad (z \in \mathbf{C}^N).$$

Satz 4.4: Seien q, q^* wie in 4.2, $p := q^*$. Dann ist

$$F: (A_q)'_b \to A_p^\circ$$

ein linearer topologischer Isomorphismus.

Beweis: Der Beweis von Meise-Taylor [1], 4.2 für N=1 läßt sich ohne Schwierigkeiten auf diesen Fall verallgemeinern. Taylor [1], Th.5.2, p.452 umfasst unseren Satz. Nach Anwendung eines dieser Sätze genügt es, erst nachzurechnen, daß $(kq)^*(z) = kq^*(\frac{1}{k}z)$ $(z \in \mathbf{C}^N)$, dann 4.2.1) für q^* auszunutzen, und 4.4 ist bewiesen.

Def. 4.5: Sei q wie in 4.2. Für $\mu, \nu \in (A_q)'$ setzen wir

$$M_\mu(\nu) := \mu * \nu := F^{-1}(F(\mu)F(\nu)).$$

T_μ sei die Transponierte auf A_q der stetigen linearen Abbildung M_μ.

Satz 4.6: Für q wie in 4.2 erhalten wir:

1) $(A_q)'_b$ wird mit dem Produkt * eine kommutative topologische Algebra mit Einselement δ_0: $f \mapsto f(0)$.

2) Ist $F(\mu)(w) = \sum_i a_i w^i$ $(i \in \mathbf{N}_o^N)$, so ist

$$T_\mu(f) = \sum_i a_i \partial_1^{i_1} \ldots \partial_N^{i_N}(f)$$

für alle $f \in A_q$, und diese Reihe konvergiert in A_q. T_μ ist also ein Differentialoperator eventuell unendlicher Ordnung.

3) Für alle $f \in A_q$, $\mu \in (A_q)'$ und $z \in \mathbf{C}^N$ ist

$$T_\mu(f)(z) = \langle \mu_\xi, f(\xi+z) \rangle.$$

T_μ ist also der Faltungsoperator zu μ.

4) T_μ ist surjektiv für jedes $\mu \in (A_q)' \setminus \{0\}$.

Beweis: 1) ist leicht nachzurechnen.

2): Sei für $z \in \mathbf{C}^N$ und $i \in \mathbf{N}_o^N$ $\delta_{z,i}$ das Element von $(A_q)'$, das ein f auf $\partial_1^{i_1} \ldots \partial_N^{i_N} f(z)$ abbildet. Dann ist

$$T_\mu(f)(z) = \langle T_\mu(f), \delta_{z,0} \rangle = \langle \mu * \delta_{z,0}, f \rangle.$$

Weil F^{-1} stetig ist und für $w \in \mathbf{C}^N$ $F(\delta_{z,0})(w) = e^{\langle z,w \rangle}$, folgt

$$\mu * \delta_{z,0} = F^{-1}\Big(\sum_i a_i w^i e^{\langle z,w \rangle} \Big) = \sum_i a_i F^{-1}(w^i e^{\langle z,w \rangle}) \text{ aus 1.9.}$$

Schließlich ist $F(\delta_{z,i})(w) = \langle (\delta_{z,i})_\xi, e^{\langle \xi,w \rangle} \rangle = w^i e^{\langle z,w \rangle}$. Da F bijektiv ist, beweist das 2).

3) Für $e_w : \xi \mapsto e^{\langle \xi,w \rangle}$ ist

$$T_\mu(e_w)(z) = \sum_i a_i w^i e^{\langle z,w \rangle} = F(\mu)(w) e^{\langle z,w \rangle} = \langle \mu_\xi, e_w(\xi+z) \rangle.$$

3) gilt also auf dem von den e_w $(w \in \mathbf{C}^N)$ aufgespannten Untervektorraum U von A_q. Der ist (vgl. Taylor [2], Th.3, p.531) sogar stark dicht in jedem $W_{D,q}$. Weil q 1.1.2*) erfüllt, ergibt eine einfache Rechnung 3) für alle $f \in A_q$.

4) M_μ ist injektiv mit schwach abgeschlossenem Bild nach Lemma 3.2. Daraus folgt 4) nach z.B. Köthe [1], Vol.2, §33, 4(2) p. 18.

Satz 4.7: Für q wie in 4.2, $p := q^*$, $(\mu_1, \ldots, \mu_M) \in ((A_q)')^M$,

$$F := (F_1, \ldots, F_M) := (F(\mu_1), \ldots, F(\mu_M)),$$

$$W := \bigcap_{i=1}^M \ker T_{\mu_i} \quad \text{und} \quad I := \overline{I(F)} \text{ in } A_p^\circ$$

transformiert F die exakte Sequenz

$$0 \to W^\perp \to (A_q)' \to {}^{(A_q)'}\!/_{W^\perp} \to 0$$

auf

$$0 \to I \to A_p^\circ \to {}^{A_p^\circ}\!/_{I} \to 0.$$

Insbesondere ist W genau dann in A_q komplementiert, wenn I in A_p° komplementiert ist.

Beweis: Es ist $W^\perp = \overline{\sum_{i=1}^{M} \mathrm{Im}(M_{\mu_i})}$ nach klassischer Dualitätstheorie (vgl. z.B. Jarchow [1], 8.6 Prop.2.(c)), und $\mathcal{F}(\mathrm{Im}(M_{\mu_i})) = I(F_i)$ ist leicht nachzurechnen.

Also ist wegen 4.4 $\mathcal{F}(W^\perp) = \overline{\sum_{i=1}^{M} I(F_i)} = \overline{I(F)}$, und der Satz ist gezeigt.

Dies erlaubt uns, die Theoreme aus den Kapiteln 2 und 3 auf Systeme von Faltungsoperatoren auf A_q anzuwenden.

Theorem 4.8: Sei q wie in 4.2, $p := q^*$, seien $\mu_1,\dots,\mu_N \in A_p^\circ(\mathbb{C}^N)$ so, daß $F := (\mathcal{F}(\mu_1),\dots,\mathcal{F}(\mu_N))$ projektiv langsam fallend in A_p° ist. Dann ist $W := \bigcap_{i=1}^{N} \ker T_{\mu_i}$ genau dann komplementiert in A_q, wenn es Differentialpolynome $T_1,\dots,T_R$ gibt mit $W = \bigcap_{j=1}^{R} \ker T_j$.

Beweis: Nach 4.2, 1.20 und 1.21 hat A_p° (DN). Also ist nach 2.38 $I(F) = \overline{I(F)}$ genau dann in A_p° komplementiert, wenn V(F) endlich ist, wenn also für Polynome $Q_1,\dots Q_R$ $I(F) = I(Q_1,\dots,Q_R)$ ($I(Q_1,\dots,Q_R)$ ist wegen 3.19 abgeschlossen). Für $T_j := T_{\mathcal{F}^{-1}(Q_j)}$ ist also $W = \mathcal{F}^{-1}(I(F))^\perp = \bigcap_{j=1}^{R} \ker T_j$, und die T_j sind nach 4.6.2) Differentialpolynome.

Theorem 4.9: Sei $q: \mathbb{C}^2 \to [0,\infty[$ wie in 4.2, sei $T: A_q \to A_q$ ein Faltungsoperator der Form $f \mapsto F(\partial_1)f - P(\partial_2)f$ für ein Differentialpolynom P in ∂_2 und einen Differentialoperator ev. unendlicher Ordnung F in ∂_1, $T \neq 0$. Dann hat T genau dann ein stetiges lineares Rechtsinverses, wenn auch F ein Differentialpolynom ist oder P die Multiplikation von f mit einer Konstanten a ist so, daß $F(z)-a$ höchstens endlich viele Nullstellen hat.

Beweis: Wende 3.22 auf $I(F(T))$ in A_p^o ($p := q^*$) an und benutze 4.7.

Theorem 4.10: Sei $q: \mathbb{C}^2 \to [0,\infty[$ wie in 4.2 und radial. Sei $T: A_q \to A_q$ ein Faltungsoperator der Form $f \mapsto P(\partial_1,\partial_2)f - F(\partial_1)f$ für ein Differentialpolynom P in ∂_1,∂_2 und einen Differentialoperator ev. unendlicher Ordnung F in ∂_1. Sei P von der Form $P(\partial_1,\partial_2) = \sum_{i+j\le m} a_{i,j}\partial_1^i\partial_2^j$, $a_{0,m} \neq 0$.

Dann hat T genau dann ein stetiges lineares Rechtsinverses, wenn auch F ein Differentialpolynom ist oder P gleich $a_{0,0}$ ist so, daß $F(z)-a_{0,0}$ höchstens endlich viele Nullstellen hat.

Beweis: Wende 3.23 auf $I(F(T))$ in A_p^o ($p := q^*$) an und benutze 4.7.

Bem. 4.11: Analog lassen sich aus 3.16 mit 3.22 oder 3.23 Korollare bilden, die für andere Faltungsoperatoren zeigen, daß sie keine stetigen linearen Rechtsinversen haben.

LITERATUR:

C. A. Berenstein - B. A. Taylor [1] : A New Look on Interpolation Theory for Entire Functions of One Variable
Adv. in Math.; Vol.33 (1979) p.109-143

C. A. Berenstein - B. A. Taylor [2] : Interpolation Problems in C^n with Applications to Harmonic Analysis
J. d'Anal. Math.; Vol.38 (1980) p.188-254

C. A. Berenstein - B. A. Taylor [3] : On the Geometry of Interpolating Varieties
Sem. Lelong-Skoda, Ann. 1980/81; Springer Lect. Notes in Math.; Vol.919 (1982)

R. P. Boas [1] : Entire Functions
Acad. Press (1954); New York

P. B. Djakov - B. S. Mitiagin [1] : The Structure of Polynomial Ideals in the Algebra of Entire Functions
Stud. Math.; Vol.63 (1980) p.85-104

R. C. Gunning - H. Rossi [1] : Analytic Functions of Several Complex Variables
Prentice-Hall (1965); Englewood Cliffs, N.J.

L. L. Helms [1] : Einführung in die Potentialtheorie
De Gruyter (1973); Berlin, New York

L. Hörmander [1] : Generators for Some Rings of Analytic Functions
Bull. AMS; Vol.73 (1967) p.943-949

L. Hörmander [2] : An Introduction to Complex Analysis in Several Variables
North Holland (1973); Amsterdam, London, New York

M. Jarnicki [1] : A Method of Holomorphic Retraction and Pseudoinverse Matrices in the Theory of Continuation of δ-tempered Functions
Pol. Acad. Sci., Inst. of Math., preprint No.276 (1983)

H. Jarchow [1] : Locally Convex Spaces
B. G. Teubner (1981); Stuttgart

J. J. Kelleher - B. A. Taylor [1] : Finitely Generated Ideals in Rings of Analytic Functions
Math. Ann.; Vol.193 (1971) p.223-237

G. Köthe [1] : Topological Vector Spaces, Vol. 1 + 2
Springer (1969,1979); Berlin, Heidelberg, New York

H. Komatsu [1] : Ultradistributions I, Structure Theorems and a Characterization
J. Fac. Sci., Tokyo, Sec. IA; Vol.20 (1973) p.25-105

M. A. Krasnosel'skii - Y. B. Rutickii [1] : Convex Functions and Orlicz-Spaces
P. Noordhoff (1961); Groningen

B. J. Lewin [1] : Nullstellenverteilung ganzer Funktionen
Akademie-Verlag (1962); Berlin

A. Martineau [1] : Equations différentiels d'ordre infini
Bull. Soc. Math. France; Vol.95 (1967) p.109-154

R. Meise [1] : Sequence Space Representations for (DFN)-Algebras of Entire Functions Modulo Closed Ideals
J. reine u. Angew. Math.; Vol.363 (1985), p.59-95

R. Meise - K. Schwertfeger - B. A. Taylor [1] : On Kernels of Slowly Decreasing Convolution Operators
Doga, Tr. J. Math.; Vol.10 (1986), p.176-197

R. Meise - B. A. Taylor [1] : Sequence-Space-Representations for (FN)-Algebras of Entire Functions Modulo Closed Ideals
erscheint in Stud. Math.

R. Meise - B. A. Taylor [2] : Each Nonzero Convolution Operator on the Entire Functions Admits a Continuous Right Inverse
erscheint in Math. Z.

R. Meise - B. A. Taylor [3] : Complementation of Closed Ideals in Weighted (FN)-Algebras of Entire Functions
Manuskript

A. Pietsch [1] : Nuclear Locally Convex Spaces
Springer (1972); Berlin, Heidelberg, New York

R. T. Rockafellar [1] : Convex Analysis
Princ. Univ. Pr. (1970); Princeton, N.J.

J. P. Serre [1] : Geométrie algèbrique et geométrie analytique
Ann. Inst. Fourier; Vol.6 (1955/56) p.1-42

H. Skoda [1] : Applications des techniques L^2 à la theorie des idéaux d'une algèbre des fonctions holomorphes avec poids
Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 4e serie; Vol.5 (1972) p.545-579

B. A. Taylor [1] : Some Locally Convex Spaces of Entire Functions
Proc. Symp. Pure Math. II; (1968) p.431-474

B. A. Taylor [2] : On Weighted Polynomial Approximation of Entire Functions
Pac. J. Math.; Vol.155 (1971) p.523-539

D. Vogt [1] : Charakterisierung der Unterräume von s
Math. Z.; Vol.155 (1982) p.109-117

D. Vogt [2] : Eine Charakterisierung der Potenzreihenräume von endlichem Typ und ihre Folgerungen
Man. Math.; Vol.37 (1982) p.269-301

D. Vogt -M. J. Wagner [1] : Charakterisierung der Quotientenräume von s und eine Vermutung von Martineau
Stud. Math.; Vol. 67 (1980) p.225-240

K. P. Zahariuta [1] : On the Isomorphism of Cartesian Products of Locally Convex Spaces
Stud. Math.; Vol.46 (1973) p.201-221

ZUSAMMENFASSUNG

Wir studieren nukleare Fréchetalgebren der Form

$$A_p^\circ(\mathbf{C}^N) := \{f \in H(\mathbf{C}^N) \mid \forall\, D>0 : \sup_{z\in\mathbf{C}^N} |f(z)|e^{-Dp(z)} < \infty\}$$

für nichtnegative, plurisubharmonische Funktionen p mit

$$\log(1+|z|^2) = o(p(z)).$$

Ist z.B. p radial, $p(2z) = O(p(z))$, dann sind alle Hauptideale in $A_p^\circ(\mathbf{C}^N)$ abgeschlossen. Das Hauptergebnis der Arbeit ist das

Theorem: Sei $p(z,w) := (|z|^2+|w|^2)^\alpha$ $(\alpha>0)$, $G \in A_p^\circ(\mathbf{C}^2)$,

$$G(z,w) = f(z) - \sum_{\substack{i+j\le m \\ 0\le i,j}} a_{i,j} z^i w^j \quad (m\in\mathbf{N},\ a_{i,j}\in\mathbf{C},\ a_{0,m}\neq 0).$$

Dann sind äquivalent: (1) f ist kein Polynom.

(2) Das von G erzeugte Hauptideal in $A_p^\circ(\mathbf{C}^2)$ ist nicht komplementiert.

(3) Für alle $H \in A_p^\circ(\mathbf{C}^2)\setminus\{0\}$ ist das von GH erzeugte Hauptideal in $A_p^\circ(\mathbf{C}^2)$ nicht komplementiert.

Durch Fourier-Borel-Transformation lassen sich dieses und andere Ergebnisse der Arbeit auf Nullräume von Faltungsoperatoren auf gewichteten (DFN)-Algebren ganzer Funktionen übertragen.

Beweisaufbau: Ein Satz von Djakov und Mitiagin ergibt (2)=>(1). (2)<=>(3) läßt sich auf das Splitting-Theorem von Vogt und Wagner zurückführen. (1)=>(2) reduzieren wir durch Substitution und Übergang von p zu einem p' auf den Fall $G(z,w)=f(z)-w$.

Wir stellen daraufhin den Faktorraum nach dem von G erzeugten Hauptideal I als $A_q^\circ(\mathbf{C})$, $q(z):=p'(z,f(z))$ dar und konstruieren ein abgeschlossenes, komplementiertes Hauptideal J in $A_q^\circ(\mathbf{C})$ so, daß nach einer geeigneten Verallgemeinerung eines Theorems von Meise und Taylor $A_q^\circ(\mathbf{C})/J$ isomorph zu einem Potenzreihenraum von endlichem Typ ist. Nach einem Satz von Zahariuta kann dann $A_q^\circ(\mathbf{C})$ nicht isomorph zu einem Unterraum von $A_{p'}^\circ(\mathbf{C}^2)$, einem Potenzreihenraum von unendlichem Typ, sein.

Kernstück des Beweises ist die Konstruktion von J. Mit Hörmanders $\bar\partial$-Theorie führen wir das Problem auf die Existenz bestimmter subharmonischer Funktionen auf $\mathbf{C}$ zurück, die wir schließlich durch Fegen von $\log_+|f|$ erzeugen.

Druck und Verarbeitung: Dissertations Druck Darmstadt, Tel 06151/21353